Université de Caen/Basse-Normandie

U.F.R de Sciences

École doctorale SIMEM E.D. 181

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme

THÈSE

Présentée par

M. Pierre GILLIBERT

et soutenue

le 8 décembre 2008

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

Arrêté du 07 août 2006

Points critiques de couples de variétés d'algèbres

Membres du jury

Martin Goldstern	Professeur, University of Technology in Wien (rapporteur)
Patrick Dehornoy	Professeur, Université de Caen
Maurice Pouzet	Professeur, Adjunct à University of Calgary
Miroslav Ploščica	Professeur, Slovak Academy of Sciences
Friedrich Wehrung	Directeur de recherche au CNRS, Université de Caen (directeur de thèse)

Remerciements

Remerciement... ce mot à l'air bien simple et anodin, mais il cache une partie de la thèse difficile à écrire. Il ne suffit pas seulement d'écrire merci, suivi d'une liste de noms. Il faut aussi donner les raisons, complimenter, le tout élégamment. Cela étant d'autant plus important que cette partie sera la seule véritablement lue par un grand nombre de personnes. D'autres difficultés sont d'une part qu'il ne faut omettre personne, d'autre part, en raison d'un problème intrinsèque lié à l'écriture, il faut choisir un ordre total sur les personnes à remercier, avec les problèmes habituels qui s'ensuivent concernant l'importance relative donnée à chaque protagoniste.

Cependant je commence avec le cas universel. Je ne pourrais jamais remercier assez mon professeur Friedrich Wehrung, qui au cours des quatre dernières années, pendant mon DEA et ma thèse, m'a constamment aidé par ses remarques et toujours poussé à rechercher dans la bonne direction. Il est aussi un homme très disponible ; quand j'avais quelque idée difficile à formaliser ou un problème de compréhension, j'ai toujours pu le voir presque immédiatement et à chaque fois il a su me débloquer par ses conseils avisés, formulés avec humour et d'un ton enjoué. Je dois enfin le remercier pour avoir relu avec patience les innombrables versions préliminaires successives de cette thèse, ainsi que celles de mes articles, et à en avoir corrigé les innombrables fautes.

Au cours de ma thèse j'ai été amené à rencontrer plusieurs fois Miroslav Ploščica. Les discussions que j'ai eues avec lui, ainsi que ses travaux m'ont été d'une grande aide. J'ai été particulièrement impressionné par sa clairvoyance. Je le remercie d'autant plus qu'il a bien voulu être membre de mon jury.

J'exprime aussi ma profonde gratitude envers James B. Nation qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse et qui ne pourra malheureusement pas assister à la soutenance. Cela revêt une signification particulière pour moi, car je suis en profonde admiration devant l'élégance de son contre-exemple à la conjecture de la hauteur finie sur les variétés de treillis. Je n'oublie pas non plus Martin Goldstern qui m'a fait le grand honneur d'accepter d'être rapporteur de ma thèse. Je remercie également Patrick Dehornoy, dont l'œuvre et le travail sont sources intarissables d'inspiration. Je remercie aussi Maurice Pouzet, qui a manifesté un grand interêt pour mes travaux, d'avoir accepté d'être membre de mon jury.

Je tiens aussi à remercier toute ma famille, Papa et Maman, pour tout l'amour qu'ils m'ont donné et tout ce qu'ils m'ont appris. Mes grands-parents, en particulier ma grand-mère, Bonne maman, qui, aussi loin que je puisse me remémorer, a toujours aimé faire des maths avec moi et a su me montrer que les mathématiques pouvaient être amusantes et même passionnantes. Je me suis toujours senti particulièrement proche de mes frères et sœurs et je me suis bien amusé à leurs côtés. Je tiens donc à remercier mon grand frère Jean, dont la réussite m'a particulièrement encouragé, je remercie aussi son épouse Adeline, ainsi que leur enfant Rémi. Je continue avec Georges dont j'apprécie les discussions politiques, théologiques et informatiques que nous eûmes, sa fiancée Delphine aux capacités artistiques admirables, Luc qui fait preuve d'un sens de la répartie humoristique des plus impressionnants, André, qui a toujours bien voulu m'aider, avec une efficacité redoutable, à dépanner mon ordinateur, Florence qui a eu le bon goût de faire des mathématiques, allez, tu arriveras bien un jour à me montrer, en cinq minutes, le théorème de Fermat en supposant que les courbes elliptiques sont modulaires. . .Passons ensuite à Myriam, sa capacité d'analyse psychologique quasi-infaillible est incroyable, mais l'énergie et le travail qu'elle met dans ses études m'a motivé et parfois même effrayé, malgré son choix surprenant de faire des études littéraires. Je remercie aussi tous mes autres frères et sœurs. Je n'oublierai jamais nos parties de ballon prisonnier et autres jeux, promenades ou travaux que nous fîmes tous ensemble.

Je salue aussi mes collègues doctorants, je remercie d'abord les anciens Erwan, Corentin ainsi que Gabriele avec qui j'ai partagé quelque temps un bureau. Je pense aussi à ceux de ma génération, Marc et Laurent qui m'ont aidé à survivre au stage résidentiel du CIES, ainsi que Patrick. Viennent ensuite les jeunes, particulièrement Jean et Jérémy qui partagent mon bureau et qui ont toujours cherché à répondre aux questions, souvent peu claires, que je leur posais. J'ai aussi beaucoup apprécié les repas ou cafés que j'ai pris avec eux, Jean-Philippe et Nicolas. Ces derniers, bien que venant d'un monde matérialiste ou les recherches sont appliquées (ou du moins semblent applicables), sont très sympathiques. Nous eûmes de nombreuses discussions, diverses et variées, souvent agréablement futiles. Je ne sais pas à quel point nos laboratoires respectifs devraient ou pourraient développer des synergies, mais cela ne nous a nullement influencés sur les discussions de synergies toutes autres. Finalement salut à Claire tes «babababa» m'ont permis d'oublier quelques instants les tracas administratifs et les divers délais à respecter.

Tant pis pour les remerciements multiples, mais j'ai beaucoup apprécié le travail d'organisation du séminaire jeunes, par Erwan, Emmanuel, Marc et Jean. Grâce à vous j'ai une meilleure compréhension des autres et même de la variété des domaines des mathématiques.

Cela fait huit ans que je suis à l'université de Caen. J'ai vu défiler dans mes divers cours presque tous les professeurs de mathématiques et j'en ai gardé un excellent souvenir. La diversité des styles d'enseignement m'a beaucoup plu, car elles étaient toujours très claires. Je vous dis donc un grand merci à tous. Je remercie aussi les secrétaires du département de maths qui m'ont souvent aidé.

Résumé

Résumé de la thèse en français : L'ensemble de toutes les congruences d'une algèbre, ordonné par inclusion, est un treillis algébrique (Birkhoff), ses éléments compacts sont les congruences finiment engendrées ; elles forment un demi-treillis. Un demi-treillis est *relevable* dans une variété V s'il est isomorphe au demi-treillis des congruences compactes d'une algèbre de V. Les travaux de Wehrung sur CLP, ainsi que ceux de Ploščica, illustrent que même pour une variété d'algèbres facile à décrire, comme la variété de tous les treillis, ou une variété finiment engendrée, la caractérisation des demi-treillis relevables est difficile.

Le *point critique* entre deux variétés V et W est le plus petit cardinal d'un demi-treillis relevable dans V mais pas dans W.

Nous introduisons un outil, de nature catégorique, donnant des liens entre les relèvements de diagrammes de demi-treillis et les relèvements de demi-treillis dans une variété donnée. Nous montrons que si V et W sont des variétés finiment engendrées de treillis telles que W ne relève pas tous les demi-treillis relevés par V, alors le point critique entre V et W est soit fini, soit un aleph d'indice fini. Nous trouvons deux variétés finiment engendrées de treillis modulaires dont le point critique est $\aleph_1$, ce qui infirme une conjecture posée par Tůma et Wehrung.

Nous prouvons, en utilisant la théorie des anneaux réguliers de von Neumann et la théorie du monoïde de dimension d'un treillis, que le point critique entre des variétés engendrées par des treillis de sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de même dimension finie sur des corps finis est au moins $\aleph_2$. Nous prouvons l'égalité pour les dimensions 2 et 3.

Résumé de la thèse en anglais : The set of all congruences of a given algebra, ordered by inclusion, is an algebraic lattice (Birkhoff), its compact elements are the finitely generated congruences ; they form a semilattice. A semilattice is *liftable* in a variety V if it is isomorphic to the semilattice of all compact congruences of an algebra in V. The works of Wehrung on CLP, and of Ploščica, illustrate that even for an easy to describe variety of algebras, like the variety of all lattices, or the finitely generated varieties, characterizing the liftable semilattices is hard.

The *critical point* of two varieties V and W is the smallest cardinal of a semilattice liftable in V but not in W.

We introduce a tool, with categorical flavor, that gives a link between lifting diagrams of semilattices and lifting semilattices in a given variety. Given finitely generated varieties of lattices V and W such that W does not lift all semilattices liftable in V, we prove that the critical point of V and W is either finite or some aleph of finite index. We give two finitely generated varieties of modular lattices with critical point $\aleph_1$, which disproves a conjecture of Tůma and Wehrung.

Using the theory of Von Neumann regular rings together with the dimension monoid of a lattice, we prove that the critical point of varieties of lattices generated by subspace lattice of vector spaces of the same finite dimension on finite fields is at least $\aleph_2$. We prove the equality for dimensions 2 and 3.

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction

Une *algèbre* A est un ensemble non vide muni d'opérations d'une puissance finie de A dans A. Une *congruence* de A est une relation d'équivalence compatible avec les opérations. L'ensemble de toutes les congruences de A est un treillis algébrique, appelé *treillis des congruences de* A et noté $\operatorname{Con} A$. L'ensemble de toutes les congruences finiment engendrées de A est un $(\vee, 0)$-demi-treillis, noté $\operatorname{Con_c} A$. Une variété d'algèbres $\mathcal{V}$ est la classe de toutes les algèbres ayant les même lois et satisfaisant un ensemble d'identités fixé. Un $(\vee, 0)$-demi-treillis D est *relevable dans* $\mathcal{V}$ s'il est isomorphe à $\operatorname{Con_c} A$ pour $A \in \mathcal{V}$. Nous notons alors $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}$ la classe de tous les $(\vee, 0)$-demi-treillis relevables dans $\mathcal{V}$. L'un des problèmes abordés dans cette thèse est l'étude de $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}$, pour certaines variétés $\mathcal{V}$.

Soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux variétés ; le *point critique de* $\mathcal{V}_1$ *sous* $\mathcal{V}_2$, noté $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2)$ est le plus petit cardinal d'un $(\vee, 0)$-demi-treillis dans $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}_1 - \operatorname{Con_c} \mathcal{V}_2$. Nous donnons dans cette thèse des résultats généraux sur les point critiques. À partir d'un «bon» diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis nous construisons un $(\vee, 0)$-demi-treillis appelé *condensat*. Un relèvement du condensat permet de construire un relèvement du diagramme, mais ce condensat est de cardinal plus grand que le diagramme. Cela nous permet de déduire, dans le Corollaire 3.6.14, que si $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont des variétés finiment engendrées de treillis alors soit $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) < \aleph_\omega$ soit $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \infty$ (i.e. $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}_1 \subseteq \operatorname{Con_c} \mathcal{V}_2$). Enfin nous calculons des points critiques entre des variétés de treillis explicitement données, en particulier nous donnons deux variétés de treillis ayant un point critique $\aleph_1$, résolvant ainsi un problème posé par Tůma et Wehrung en 2002.

1.1. Rappels historiques

Grätzer et Schmidt ont démontré dans [**17**] que tout $(\vee, 0)$-demi-treillis est relevable avec une algèbre dont toutes les lois sont unaires. Cependant l'ensemble des lois construites est de cardinal infini. En général ce cardinal ne peut pas être restreint, comme l'ont prouvé Freese, Lampe et Taylor dans [**7**] : Soient V un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps indénombrable K et $\operatorname{Sub_c} V$ le $(\vee, 0)$-demi-treillis des sous-espaces vectoriels de dimension finie de V. Si A est un relèvement de $\operatorname{Sub_c} V$, alors le type de similarité de A a au moins $\operatorname{card} K$ opérations. Cependant, si nous faisons quelques hypothèses supplémentaires, le nombre d'opérations peut être restreint. Lampe démontre dans [**26**] que tout $(\vee, 0)$-demi-treillis *borné* est relevable avec un magma.

Pour une variété d'algèbres $\mathcal{V}$, nous notons $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}$ la classe de tous les $(\vee, 0)$-demi-treillis relevables dans $\mathcal{V}$. En général, étant donné une variété $\mathcal{V}$, caractériser $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}$ est difficile, même pour des variétés très simples. Par exemple, Funayama et Nakayama ont montré dans [**9**] que $\operatorname{Con} L$ est un treillis distributif pour tout treillis L (cela équivaut à dire que $\operatorname{Con_c} L$ est un demi-treillis distributif). La question de savoir si la réciproque est vraie est appelée CLP. Tout d'abord Dilworth a étudié la réciproque dans le cas fini, il a démontré (mais pas publié) que tout treillis distributif fini est treillis des congruences d'un treillis fini. La première preuve publiée de ce résultat est due à Grätzer et Schmidt dans [**16**].

Schmidt démontre dans [**35**] que tout treillis distributif fini est le treillis des congruences d'un treillis modulaire (infini). Plus tard il démontre dans [**36**] que tout treillis distributif avec 0 est le treillis des congruences compactes d'un treillis. En utilisant les mêmes outils Huhn prouve dans [**21**] que tout $(\vee, 0)$-demi-treillis de cardinal au plus $\aleph_1$ est relevable avec un treillis.

Une autre approche basée sur le relèvement de diagrammes fut proposée par Pudlák en 1985 dans [**32**]. Pour cela nous devons d'abord introduire le foncteur $\operatorname{Con_c}$. Il est défini de la manière suivante : si $f\colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres, nous posons :

$$(\operatorname{Con} f)(\alpha) = \text{la congruence de } B \text{ engendrée par } \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in \alpha\},$$

nous notons $\operatorname{Con_c} f\colon \operatorname{Con_c} A \to \operatorname{Con_c} B$ la restriction de f, c'est un morphisme de $(\vee, 0)$-demi-treillis. Cela définit un foncteur $\operatorname{Con_c}$ de la catégorie des algèbres d'un type de similarité donné dans la catégorie des $(\vee, 0)$-demi-treillis.

Si I est un ensemble ordonné et $\mathcal{C}$ une catégorie, alors un *système inductif indexé par I de* $\mathcal{C}$ est une famille $(A_i, f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I}$ telle que $f_{i,j}\colon A_i \to A_j$ est une flèche de $\mathcal{C}$, $f_{i,i} = \mathrm{id}_{A_i}$ et $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ pour tous $i \leq j \leq k$ dans I.

La notion de limite inductive d'un système inductif est usuelle. Si $\vec{A} = (A_i, f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I}$ est un système inductif, nous notons $(A, f_i)_{i \in I} = \varinjlim \vec{A}$ une limite inductive de $\vec{A}$. Toute variété d'algèbres, considérée en tant que catégorie, possède toutes les limites inductives indexées par un ensemble ordonné. Il est bien connu que le foncteur $\operatorname{Con_c}$ préserve les limites inductives filtrantes croissantes (on peut par exemple le démontrer facilement en utilisant le Lemme 3.1.2).

Théorème. *Soient $\mathcal{V}$ une variété d'algèbres, soit I un ensemble ordonné filtrant croissant et soit $\vec{A} = (A_i, f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I}$ un système inductif indexé par I. Si*

$$(A, f_i)_{i \in I} = \varinjlim (A_i, f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I},$$

alors

$$(\operatorname{Con_c} A, \operatorname{Con_c} f_i)_{i \in I} = \varinjlim (\operatorname{Con_c} A_i, \operatorname{Con_c} f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I}.$$

Le théorème suivant est prouvé par Pudlák dans [**32**].

Théorème. *Tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif est réunion filtrante croissante de $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif finis.*

En utilisant ce résultat, Pudlák prouve qu'il existe un foncteur Ψ de la catégorie des treillis distributifs avec 0 dans la catégorie des treillis telle que $\operatorname{Con_c} \circ \Psi$ soit équivalent à l'identité.

Le résultat suivant est prouvé par Bulman-Fleming et McDowell dans [**2**].

Théorème. *Tout* $(\vee, 0)$*-demi-treillis distributif est limite inductive d'un système filtrant croissant d'algèbres de Boole finies.*

Contrairement à la situation avec le résultat de Pudlák, la limite inductive dans ce résultat n'est pas une réunion croissante. Cependant cette approche permet à Grätzer, Lakser et Wehrung de montrer dans [**18**] que tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif de cardinal au plus $\aleph_1$ est relevable avec un treillis localement fini, avec 0, et relativement complémenté. Des résultats de relèvement avec d'autres structures découlent aussi de ce théorème.

Une *2-échelle* est un treillis I tel que tout segment initial de I est fini et tout élément de I a au plus deux prédécesseurs immédiats. En appliquant le lemme de Zorn, il est facile de construire des 2-échelles de cardinal $\aleph_1$ (voir [**3**]).

Voici une brève description des preuves basées sur l'approche de Pudlák. On considère un $(\vee, 0)$-demi-treillis D de cardinal $\aleph_1$ et une 2-échelle I. Le $(\vee, 0)$-demi-treillis D est isomorphe à $\varinjlim \vec{D}$, où $\vec{D}$ est un système inductif indexé par I d'algèbres de Boole finies. On construit alors un système inductif $\vec{A}$ d'algèbres de type voulu, tel que $\mathrm{Con_c} \circ \vec{A} \cong \vec{D}$. On a alors $D \cong \mathrm{Con_c} \varinjlim \vec{A}$. L'algèbre $\varinjlim \vec{A}$ est un relèvement de D du type voulu.

Wehrung prouve dans [**40**] qu'il existe un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif de cardinal $\aleph_{\omega+1}$ qui n'est pas relevable dans la variété de tous les treillis, réfutant ainsi la conjecture CLP. Ce résultat fut ensuite affiné par Růžička qui prouve dans [**33**] qu'il existe un treillis de cardinal $\aleph_2$ qui n'est pas relevable dans la variété de tous les treillis. Ploščica prouve dans [**30**], en affinant les méthodes précédentes, qu'il existe une algèbre de majorité M dans une variété finiment engendrée, telle que M est de cardinal $\aleph_2$ et $\mathrm{Con_c}\, M$ n'est pas relevable dans la variété de tous les treillis.

L'étude de CLP a posé de nouvelles questions. Si A est une algèbre, alors $\mathrm{Con_c}\, A$ a-t-il des relèvements vérifiant des propriétés supplémentaires ? Par exemple si L est un treillis, existe-t-il une algèbre A, congruence-permutable telle que $\mathrm{Con_c}\, L \cong \mathrm{Con_c}\, A$? Cette assertion fut infirmée par Růžička, Tůma et Wehrung dans [**34**] où ils montrèrent (avant la solution de CLP) que si $\mathcal{V}$ est une variété non distributive de treillis, alors $\mathrm{Con_c}\, F_{\mathcal{V}}(\aleph_2)$ n'est pas relevable avec une algèbre congruence-permutable, où $F_{\mathcal{V}}(\aleph_2)$ est le treillis librement engendré par $\aleph_2$ générateurs sur $\mathcal{V}$. En particulier il existe un $(\vee, 0)$-demi-treillis de cardinal $\aleph_2$ qui n'est relevable ni avec un groupe, ni avec un module, mais qui est relevable avec un treillis. Ils montrèrent aussi que la borne $\aleph_2$ est optimale : Tout $(\vee, 0)$-demi-treillis de cardinal au plus $\aleph_1$ est relevable avec un groupe ou un module.

Étant donnés deux variétés $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ d'algèbres, le *point critique* entre $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ est le plus petit cardinal d'un $(\vee, 0)$-demi-treillis relevable dans $\mathcal{V}_1$ mais pas dans $\mathcal{V}_2$, c'est à dire

$$\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \min \{\mathrm{card}\, S \mid S \in \mathrm{Con_c}\, \mathcal{V}_1 - \mathrm{Con_c}\, \mathcal{V}_2\}.$$

Notons Λ la variété de tous les treillis et $\mathcal{G}$ la variété de tous les groupes, alors $\mathrm{crit}(\Lambda; \mathcal{G}) = \aleph_2$.

Soient $\mathcal{D}$ la variété de tous les treillis distributifs, $\mathcal{N}_5$ la variété de treillis engendrée par N_5 (cf. Figure 2.1) et $\mathcal{M}_3$ la variété de treillis engendrée par M_3. Les points critiques suivants sont connus :

$$\mathrm{crit}(\mathcal{N}_5; \mathcal{D}) = 5,$$

$$\mathrm{crit}(\mathcal{M}_3; \mathcal{D}) = \aleph_0.$$

Le cas des variétés finiment engendrées de treillis fut particulièrement étudié. Soit $\mathcal{M}_n^{0,1}$ la variété de treillis bornés engendrée par M_n (cf. Figure 4.3). Ploščica prouve dans [**28**] et [**29**] que $\mathrm{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathcal{M}_m^{0,1}) = \aleph_2$ pour tous $n > m \geq 3$. Il montre aussi que $\mathrm{crit}(\mathcal{M}_n; \mathcal{M}_m) \leq \aleph_2$ pour tous $n > m \geq 3$.

1.2. Contenu de ce travail

L'approche utilisée ici pour résoudre le problème, aussi bien de la détermination de $\mathrm{Con_c}\,\mathcal{V}$ que du calcul d'un point critique, est basée sur la construction d'un objet appelé *condensat*. Soit I un ensemble ordonné et soit $(U, |\cdot|)$ un *recouvrement normé de* I (cf. Définition 3.2.3). Pour toute variété d'algèbres $\mathcal{V}$ et tout diagramme $\vec{D} \in \mathcal{V}^I$, nous construisons un élément de $\mathcal{V}$, appelé *condensat* de $\vec{D}$ et noté $\mathrm{Cond}(U, \vec{D})$ (cf. Définition 3.4.1). Si $(U, |\cdot|)$ a une «bonne» propriété combinatoire relativement au cardinal du type de similarité de $\mathcal{V}$ et de $\vec{D}$, alors $\vec{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}$ si et seulement si $\mathrm{Cond}(U, \vec{D})$ a un *quasi-relèvement dans* $\mathcal{V}$ (cf. Définition 3.5.3).

En particulier si nous avons un diagramme $\vec{D}$ de $(\vee, 0)$-demi-treillis indexé par un ensemble ordonné avec un «bon» recouvrement normé et que $\vec{D}$ n'est pas relevable dans une variété $\mathcal{V}$, alors le condensat de $\vec{D}$ n'est pas relevable dans $\mathcal{V}$. De même pour les points critiques, si un diagramme est relevable dans une première variété, mais pas dans une seconde, alors nous obtenons une majoration du point critique (le cardinal du condensat).

Soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ deux variétés congruence-distributives finiment engendrées. En utilisant le condensat et le théorème de compacité, nous obtenons diverses équivalences. Notamment $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \aleph_0$ si et seulement si tout diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis finis indexé par une chaîne finie, relevable dans $\mathcal{V}_1$ est aussi relevable dans $\mathcal{V}_2$. Par un raisonnement plus technique, utilisant un argument de compacité, nous montrons que soit $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) < \aleph_\omega$ soit $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \infty$.

Nous donnons ensuite deux variétés finiment engendrées de treillis modulaires ayant un point critique $\aleph_1$ (cf. Section 4.1). Cela est démontré en donnant un diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis finis, indexé par $\{0, 1\}^2$, relevable dans la première variété mais pas dans la seconde. Nous répondons ainsi à une question posée par Tůma et Wehrung dans [**37**, Problem 5].

Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée de treillis modulaires, soit ℓ un majorant de la longueur des membres simples de $\mathcal{V}_1$. En utilisant la théorie du *monoïde de dimension* d'un treillis, introduit par Wehrung dans [**38**], ainsi que de la théorie les anneaux réguliers au sens de von Neumann, nous prouvons que $\mathrm{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}(\mathrm{Sub}\,F^n)) \geq \aleph_2$, pour tout corps F (cf. Théorème 4.2.5). Comme application immédiate, nous obtenons $\mathrm{crit}(\mathcal{M}_n; \mathcal{M}_3) \geq \aleph_2$. Par suite, en utilisant le résultat de Ploščica dans [**28**], nous obtenons $\mathrm{crit}(\mathcal{M}_n; \mathcal{M}_m) = \aleph_2$, pour tous entiers $n > m \geq 3$.

Nous trouvons aussi un diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis finis relevable dans $\mathcal{M}_n$, mais pas relevable dans $\mathbf{Var}(\mathrm{Sub}\,F^3)$ pour tout corps fini F vérifiant $1 + \mathrm{card}\,F < n$. Grâce aux outils introduits plus tôt nous obtenons :

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n; \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)) = \aleph_2,$$

pour tout $n \geq 4$ et tout corps F vérifiant $1 + \operatorname{card} F < n$ (cf. Corollaire 4.3.15). Nous obtenons aussi :

$$\operatorname{crit}(\mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3); \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} K^3)) = \aleph_2,$$

pour tous corps finis F et K tels que $\operatorname{card} F > \operatorname{card} K$ (cf. Corollaire 4.3.16).

L'existence d'un recouvrement normé *κ-compatible* d'un ensemble ordonné I (cf. Définition 3.2.3) est liée à une propriété combinatoire infinie (voir Théorème 3.3.2 et Corollaire 3.3.3). Par exemple la caractérisation des alephs montrée par Kuratowski dans [**25**], implique que $\{0,1\}^{n+1}$ a un recouvrement normé $\aleph_0$-compatible de cardinal κ si et seulement si $\kappa \geq \aleph_n$. Nous montrons, avec une preuve analogue à celle de Kuratowski, que si C est une chaîne, alors C^n a un recouvrement normé $\aleph_0$-compatible de cardinal $\aleph_n$. Nous montrons de plus cette propriété combinatoire sur l'ensemble ordonné I est liée à la dimension d'ordre de I (cf. Corollaire 3.3.11). Dans le Lemme 3.3.12 nous montrons que la dimension d'ordre du cube tronqué $\{P \in \mathfrak{P}(\{0,\dots,n\}) \mid \operatorname{card} P \leq n+1 \text{ ou } \operatorname{card} P = n+2\}$ est $n+1$. Comme conséquence immédiate nous obtenons des ensembles libres plus grands que dans la preuve de Kuratowski, c'est à dire que pour tout $f\colon [\aleph_n]^n \to [\aleph_n]^{<\omega}$ il existe $X \in [\aleph_n]^{n+2}$ tel que pour tout $Y \in [\aleph_n]^n$, nous avons $f(Y) \cap X \subseteq Y$. Le cas $n = 4$ donne un ensemble libre à 6 éléments, et répond ainsi a une question posée par Erdös, Hajnal, Máté et Rado dans [**5**, Equation (2), Section 46, pp 285].

CHAPITRE 2

Rappels

Dans ce chapitre nous rappellerons la plupart des définitions et résultats requis pour comprendre le reste de cette thèse.

Le *cardinal* d'un ensemble X est le plus petit ordinal en bijection avec X. Un *cardinal* est le cardinal d'un ensemble. Un cardinal est un ordinal (et donc ensemble) de cardinal lui-même. Nous notons $\aleph_0$ le plus petit cardinal infini, $\aleph_1$ le plus petit cardinal strictement plus grand que $\aleph_0$, de manière général si $\alpha > 0$ est un ordinal $\aleph_\alpha$ est le plus petit cardinal strictement plus grand que tous les $\aleph_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

Nous notons ω le plus petit ordinal dénombrable, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (donc, à strictement parler, $\omega = \aleph_0$). Si n est un entier naturel, nous notons parfois $\underline{n} = \{0, \ldots, n-1\}$.

Soit X un ensemble. Nous notons $\mathfrak{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit κ un cardinal. Nous notons :

$$\begin{aligned}
[X]^{\kappa} &= \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid \operatorname{card} Y = \kappa\},\\
[X]^{\leq\kappa} &= \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid \operatorname{card} Y \leq \kappa\},\\
[X]^{<\kappa} &= \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid \operatorname{card} Y < \kappa\}.
\end{aligned}$$

En particulier $[X]^{<\aleph_0}$, souvent noté $[X]^{<\omega}$ est l'ensemble des parties finies de X.

2.1. Catégories

DÉFINITION 2.1.1. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée des entités suivantes :
– Une classe notée $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, dont les éléments sont appelés *objets de* $\mathcal{C}$;
– Une classe notée $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$, dont les éléments sont appelés *flèches de* $\mathcal{C}$;
– Pour tout $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$, d'un unique objet appelée *source de* f et d'un unique objet appelée *but de* f, nous notons alors $f \colon A \to B$ pour indiquer que la source de f est A et que le but de f est B. Nous noterons $\operatorname{Hom}(A, B)$ la classe de toutes les flèches $f \colon A \to B$;
– Pour tous A, B et C dans $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, d'une application $\circ \colon \operatorname{Hom}(B, C) \times \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A, C)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$;
– Pour tout objet A, d'une flèche $\mathrm{id}_A \colon A \to A$ appelée *identité de* A ;

soumises aux conditions suivantes

(1) Si $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ et $h \colon C \to D$, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, ce morphisme est noté $h \circ g \circ f$.

(2) Si $f \colon A \to B$, alors $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.

EXEMPLES 2.1.2. – La catégorie **Ens** dont les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications.
- La catégorie **Grp** dont les objets sont les groupes et les flèches sont les homomorphismes de groupes.
- La catégorie **Ann** dont les objets sont les anneaux et les flèches sont les homomorphismes d'anneaux.
- Nous identifions tout ensemble ordonné P avec la catégorie dont les objets sont les éléments de P et qui a exactement une flèche, notée $(i \leq j)$, de i dans j, dans le cas où $i \leq j$ dans P (cf. Définition 2.3.1).
- La *catégorie opposée* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie, notée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ qui a les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et les flèches et la composée sont retournées, i.e. $f\colon B \to A$ dans $\operatorname{Mor} \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ si et seulement si $f\colon A \to B$ dans $\operatorname{Mor} \mathcal{C}$.

NOTATION 2.1.3. Soit J une catégorie soient $i, j \in \operatorname{Ob} J$, nous notons $i \trianglelefteq j$ s'il existe une flèche $f\colon i \to j$ dans $\operatorname{Mor} J$. On remarque que la relation $\trianglelefteq$ est une relation de pré-ordre (mais pas une relation d'ordre en général).

DÉFINITION 2.1.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, une flèche $f\colon A \to B$ est un *isomorphisme* s'il existe $g\colon B \to A$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ et $g \circ f = \mathrm{id}_A$. La flèche g est alors unique, c'est *la réciproque de* f, nous la notons f^{-1}.

Dans les catégories **Ens**, **Grp** et **Ann** des ensembles, groupes et anneaux, respectivement, la notion d'isomorphisme correspond à la notion usuelle d'isomorphisme. Dans un ensemble ordonné P tout isomorphisme est l'identité d'un certain objet.

DÉFINITION 2.1.5. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur* $\Psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de deux correspondances $\Psi_{\mathrm{ob}}\colon \operatorname{Ob} \mathcal{C} \to \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ et $\Psi_{\mathrm{fl}}\colon \operatorname{Mor} \mathcal{C} \to \operatorname{Mor} \mathcal{D}$ telles que :
- Si $f\colon A \to B$ est une flèche de $\mathcal{C}$, alors $\Psi_{\mathrm{fl}}(f)\colon \Psi_{\mathrm{ob}}(A) \to \Psi_{\mathrm{ob}}(B)$.
- Si A est un objet de $\mathcal{C}$, alors $\mathrm{id}_{\Psi_{\mathrm{ob}}(A)} = \Psi_{\mathrm{fl}}(\mathrm{id}_A)$.
- Si $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ sont des flèches de $\mathcal{C}$, alors $\Psi_{\mathrm{fl}}(f) \circ \Psi_{\mathrm{fl}}(g) = \Psi_{\mathrm{fl}}(f \circ g)$.

Nous noterons toujours $\Psi(A)$ au lieu de $\Psi_{\mathrm{ob}}(A)$ et $\Psi(f)$ au lieu de $\Psi_{\mathrm{fl}}(f)$. La *composée* de foncteurs se définit de manière naturelle, ainsi que le foncteur *identité de* $\mathcal{C}$, noté $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, pour toute catégorie $\mathcal{C}$.

REMARQUE 2.1.6. Une catégorie est *petite* si les classes des objets et des flèches sont des ensembles. Ainsi cela donne un nouvel exemple de catégorie.
- La catégorie **Cat** dont les objets sont toutes les petites catégories, et les flèches sont les foncteurs.

EXEMPLES 2.1.7. Le foncteur d'oubli de la catégorie **Ann** dans la catégorie **Grp**, qui à un anneau associe le groupe additif de l'anneau et à un morphisme d'anneaux associe le morphisme correspondant de groupes.

DÉFINITION 2.1.8. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, soient $\Psi_1, \Psi_2\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle de* Ψ_1 *vers* Ψ_2 est une famille $\vec{t} = (t_A)_{A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}}$ de flèches de $\mathcal{D}$ telle que

– $t_A\colon \Psi_1(A) \to \Psi_2(A)$, pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
– Pour tout $f\colon A \to B$ flèche de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}\Psi_1(A) & \xrightarrow{\Psi_1(f)} & \Psi_1(B) \\ {\scriptstyle t_A}\big\downarrow & & {\scriptstyle t_B}\big\downarrow \\ \Psi_2(A) & \xrightarrow{\Psi_2(f)} & \Psi_2(B)\end{array}$$

C'est à dire $t_B \circ \Psi_1(f) = \Psi_2(f) \circ t_A$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, soient $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ des foncteurs, soient $\vec{s} = (s_A)_{A\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}\colon \Psi_1 \to \Psi_2$ et $\vec{t} = (t_A)_{A\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}\colon \Psi_2 \to \Psi_3$ des transformations naturelles. Alors $\vec{t} \circ \vec{s} = (t_A \circ s_A)_{A\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}\colon \Psi_1 \to \Psi_3$ est une transformation naturelle.

Définition 2.1.9. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, la *catégorie des foncteurs* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ est la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ et les flèches sont les transformations naturelles.

Les objets de cette catégorie sont parfois appelés *diagrammes* de $\mathcal{D}$ indexé par $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C} = I$ est la catégorie associée à un ensemble ordonné, alors $\mathcal{D}^I$ est *la catégorie des systèmes inductifs de $\mathcal{D}$ indexé par I*. Ses objets sont appelés *systèmes inductifs*. Si de plus I est filtrant croissant, alors les objets de $\mathcal{D}^I$ sont appelés *systèmes filtrant croissant*.

Les isomorphismes de $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ sont appelés *isomorphismes naturels*.

Définition 2.1.10. Les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *équivalentes*, s'il existe des foncteurs $\Psi_1\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $\Psi_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et des isomorphismes naturels $t_1\colon \Psi_2 \circ \Psi_1 \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ et $t_2\colon \Psi_1 \circ \Psi_2 \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Proposition 2.1.11. *Soit $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{D}$ des catégories, alors les catégories $\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2}$ et $(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2}$ sont équivalentes. L'équivalence est définie de la manière suivante :*

Soit $F\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}_1}$ un foncteur, c'est à dire un objet de $(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2}$. Nous pouvons définir un foncteur :

$$\begin{aligned}\widehat{F}\colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 &\to \mathcal{D} \\ (c_1, c_2) &\mapsto \mathcal{D}(c_2)(c_1) && \textit{pour tout } (c_1, c_2) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \\ (f, g) &\mapsto \mathcal{D}(g)_{c_1'} \circ \mathcal{D}(c_2)(f) && \textit{pour tout } (f\colon c_1 \to c_1', g\colon c_2 \to c_2') \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2),\end{aligned}$$

où $\mathcal{D}(g) = (\mathcal{D}(g)_k)_{k\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}$.

Si $F, G\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}_1}$ sont des foncteurs et $t\colon F \to G$ est une transformation naturelle, c'est à dire $t = (t_{c_2})_{c_2\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2}$ est une famille de $\mathrm{Mor}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})$ où $t_{c_2} = (t_{c_2}^{c_1})_{c_1\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1}\colon F(c_2) \to G(c_2)$ est une transformation naturelle. Alors nous pouvons définir une transformation naturelle :

$$\widehat{t} = (t_{c_2}^{c_1})_{(c_1,c_2)\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)}\colon \widehat{F} \to \widehat{G}$$

Réciproquement, étant donné un foncteur $F\colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$, *nous pouvons définir un foncteur* $\widetilde{F}\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}_1}$ *de la manière suivante sur les objets :*

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(c_2)\colon \mathcal{C}_1 &\to \mathcal{D}\\ c_1 &\mapsto F(c_1, c_2), &&\text{pour tout } c_1 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}_1\\ f &\mapsto F(f, \mathrm{id}_{c_2}), &&\text{pour tout } f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}_1\end{aligned}$$

qui est un foncteur, pour tout $c_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}_2$, *et* $\widetilde{F}$ *est définie de la manière suivante sur les flèches :*

$$\widetilde{F}(g) = (F(\mathrm{id}_{c_1}, g))_{c_1 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}_1}\colon \widetilde{F}(c_2) \to \widetilde{F}(c_2')$$

qui est une transformation naturelle, pour tout $(g\colon c_2 \to c_2') \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}_2$.

Soit $t\colon F \to G$ *une transformation naturelle, c'est à dire* $t = (t_{c_1,c_2})_{(c_1,c_2)\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)}$ *est une famille de flèches où* $t_{c_1,c_2}\colon F(c_1,c_2) \to G(c_1,c_2)$, *alors :*

$$t_{c_2} = (t_{c_1,c_2})_{c_1\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}_1}\colon \widetilde{F}(c_2) \to \widetilde{G}(c_2) \quad \text{est une transformation naturelle.}$$

et

$$\widetilde{t} = (t_{c_2})_{c_2\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}_2}\colon \widetilde{F} \to \widetilde{G} \quad \text{est une transformation naturelle.}$$

Posons :

$$\begin{aligned}\Phi\colon (\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2} &\to \mathcal{D}^{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2}\\ F &\mapsto \widehat{F} &&\text{pour tout } F \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2}\\ t &\mapsto \widehat{t} &&\text{pour tout } t \in \operatorname{Mor}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi\colon \mathcal{D}^{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2} &\to (\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2}\\ F &\mapsto \widetilde{F} &&\text{pour tout } F \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2})\\ t &\mapsto \widetilde{t} &&\text{pour tout } t \in \operatorname{Mor}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2})\end{aligned}$$

alors Ψ *et* Φ *définissent des équivalences entre les catégories* $(\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1})^{\mathcal{C}_2}$ *et* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2}$).

Définition 2.1.12. Un *objet initial* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet A de $\mathcal{C}$ tel que pour tout $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ il existe exactement une flèche de A vers B dans $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$.

Un *objet terminal* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un objet initial de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, c'est à dire un objet A de $\mathcal{C}$ tel que pour tout $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ il existe exactement une flèche de B vers A.

Définition 2.1.13. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Soit $\vec{A}$ un diagramme de $\mathcal{D}$ indexé par $\mathcal{C}$. Un *cocône* de $\vec{A}$ est une famille $(X, f_i)_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$, où $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ et $f_i\colon \vec{A}(i) \to X$ vérifient $f_j \circ \vec{A}(t) = f_i$ pour toute flèche $t\colon i \to j$ de $\mathcal{C}$. Un *morphisme de cocônes* $h\colon (X, f_i)_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \to (Y, g_i)_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ est une flèche $h\colon X \to Y$ de $\mathcal{D}$ telle que $h \circ f_i = g_i$, pour tout $i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

La *catégorie des cocônes de* $\vec{A}$ est la catégorie dont les objets sont les cocônes de $\vec{A}$ et les flèches sont les morphismes de cocônes. Une *colimite* de $\vec{A}$, appelée dans la suite *limite inductive* de $\vec{A}$, est un objet initial de la catégorie des cocônes de $\vec{A}$.

Si le diagramme $\vec{A}$ est un système inductif filtrant croissant (i.e. $\mathcal{C}$ est la catégorie associée à un ensemble ordonné filtrant croissant), alors la limite de $\vec{A}$ est appelée *limite inductive filtrante croissante*

REMARQUE 2.1.14. Il n'existe pas toujours d'objet initial, ni d'objet terminal, ni de limite inductive, mais lorsqu'un de ces objets existe il est unique à unique isomorphisme près. Attention, cette unicité de l'isomorphisme entre deux limites inductives d'un système inductif $\vec{A}$ est dans la catégorie des cocônes de $\vec{A}$.

Nous noterons $(X, f_i)_{i\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} = \varinjlim \vec{A}$ une limite de $\vec{A}$, c'est un objet de la catégorie des cocônes de $\vec{A}$. Parfois nous considérerons X comme la limite inductive, et noterons $X = \varinjlim \vec{A}$. Les morphismes f_i pour $i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ sont les morphismes *réalisant la limite*, les morphismes $f_{i\leq j}$ pour $i \leq j$ dans $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ sont les *morphismes de transition*. Si $\vec{t}\colon \vec{A} \to \vec{B}$ est une flèche de $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ (i.e. une transformation naturelle), alors les propriétés universelles permettent de construire une application $\varinjlim \vec{t}\colon \varinjlim \vec{A} \to \varinjlim \vec{B}$. Si toutes les limites inductives de $\mathcal{D}$ indexées par $\mathcal{C}$ existent nous considérerons parfois que $\varinjlim$ est un foncteur de $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{D}$.

DÉFINITION 2.1.15. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories dans lesquelles les limites filtrantes croissantes existent toutes. Un foncteur $\Psi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *préserve les limites inductives filtrantes croissantes* si pour tout ensemble ordonné I filtrant croissant et tout système inductif $\vec{A}$ de $\mathcal{C}$ indexé par I si les morphismes $f_i\colon \vec{A}(i) \to \varinjlim \vec{A}$, pour $i \in I$, réalisent la limite, alors $\Psi(\varinjlim \vec{A}) = \varinjlim(\Psi \circ \vec{A})$ et les morphismes $\Psi(f_i)\colon \Psi(\vec{A}(i)) \to \Psi(\varinjlim \vec{A})$, pour $i \in I$, réalisent la limite.

2.2. Modèles et sous-structures élémentaires

DÉFINITION 2.2.1. Un *langage* $\mathscr{L} = (L, R, \phi)$ est un triplet, tel que L et R sont des ensembles disjoints et $\phi\colon L \cup R \to \omega$ est une application vérifiant $\phi(R) \subseteq \omega - \{0\}$. Nous notons $\ell \in \mathscr{L}$ *est un symbole de loi* (parfois appelé *symbole de fonction* ou *symbole d'opération*) pour dire $\ell \in L$ et appelons $\phi(\ell)$ *l'arité de* ℓ. Nous notons $c \in \mathscr{L}$ *est un symbole de constante* pour dire $c \in L$ et $\phi(c) = 0$. Nous notons $\alpha \in \mathscr{L}$ *est un symbole de relation* pour dire $\alpha \in R$ et appelons $\phi(\alpha)$ *l'arité de* α.

Le *cardinal de* $\mathscr{L} = (L, R, \phi)$, est $\operatorname{card}\mathscr{L} = \operatorname{card} L + \operatorname{card} R$.

Une *formule du premier ordre de* $\mathscr{L}$ est un expression bien formée en $\forall, \exists, (,), =$, ou , et , $\neg$, des symboles de variable, souvent prise dans la famille $(x_k)_{k\in\omega}$, des symboles de loi et des symboles de relation. Les notions de *terme*, *formule atomique*, *variable libre* sont définies de manière usuelle.

Un *modèle* d'un langage $\mathscr{L} = (L, R, \phi)$ est un ensemble M non-vide muni d'une famille $(\ell^M)_{\ell\in L}$ et d'une famille $(\alpha^M)_{\alpha\in R}$, telles que $\ell^M\colon M^{\phi(\ell)} \to M$ est une application pour tout $\ell \in L$ et $\alpha^M \subseteq M^{\phi(\alpha)}$ est une relation pour tout $\alpha \in R$. S'il n'y a pas ambiguïté, nous notons ℓ au lieu de ℓ^M et α au lieu de α^M.

Soit M un modèle de $\mathscr{L}$, soit ψ une formule avec $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ comme variables libres. Soit $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ dans M, nous posons que $\psi(\vec{a})$ *est vraie* si l'interprétation de la formule dans M est vraie.

Un *sous-modèle* N d'un modèle M de $\mathscr{L}$ est une partie non vide de M close par les lois de M. Nous munissons alors N d'un structure de modèle, avec comme lois de N les restrictions des lois de M, et comme relation de N la restriction des relations de M.

Une *sous-structure élémentaire de* M est un sous-modèle de M qui satisfait les mêmes formules du premier ordre, c'est à dire que pour toute formule ψ ayant $\vec{x}$ comme variable libre, pour tout $\vec{a}$ dans N, $\psi(\vec{a})$ est vraie dans N si et seulement si $\psi(\vec{a})$ est vraie dans M.

Un langage $\mathscr{L}$ est un *type de similarité* s'il n'y a pas de symbole de relation dans $\mathscr{L}$. Nous appelons alors *$\mathscr{L}$-algèbre* un modèle de $\mathscr{L}$. Si A est une $\mathscr{L}$-algèbre, une *sous-algèbre* de A est un sous-modèle de A. La plus petite sous-algèbre contenant un ensemble X donné est *la sous-algèbre engendrée par* X. Si A est une sous-algèbre de A engendrée par un ensemble X fini, alors A est *finiment engendrée.*

Si A et B sont des $\mathscr{L}$-algèbres, alors un *morphisme* de A dans B est une application $f\colon A \to B$ tel que $f(\ell^A(a_1), \ldots, \ell^A(a_n)) = \ell^B(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ pour tout entier n, tout symbole de loi n-aire ℓ et tout $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Si $(A_x)_{x\in X}$ est une famille de $\mathscr{L}$-algèbres, alors le *produit de* $(A_x)_{x\in X}$ est la $\mathscr{L}$-algèbre dont l'ensemble sous-jacent est $\prod_{x\in X} A_x$ et les lois sont définies par :

$$\ell((a_x^1)_{x\in X}, \ldots, (a_x^n)_{x\in X}) = (\ell(a_x^1), \ldots, \ell(a_x^n))_{x\in X}$$

pour tout entier n, tout ℓ symbole de loi n-aire et tous $(a_x^1)_{x\in X}, \ldots, (a_x^n)_{x\in X}$ dans $\prod_{x\in X} A_x$. L'application $\pi_t\colon \prod_{x\in X} A_x \twoheadrightarrow A_t$, $(a_x)_{x\in X} \mapsto a_t$ est un morphisme surjectif appelé *projection canonique.*

Par exemple le langage des groupes ordonnés est $\mathscr{L} = \{*, {}^{-1}, 1, <\}$, où $*$ est un symbole de loi binaire, ${}^{-1}$ est un symbole de loi unaire, 1 est un symbole de loi zéro-aire et $<$ est un symbole de relation binaire. Les suites de symboles suivantes sont des formules sans variable libre :

$$(\forall x)(x * x^{-1} = 1)$$

$$(\forall x, y, z)\Big(x * (y * z) = (x * y) * z\Big)$$

la suite de symboles suivante est une formule avec x comme variable libre

$$(\forall y)(y < x \text{ ou } y = x)$$

Par contre la suite de symboles suivante n'est pas une formule

$$x_1(\forall))(\exists($$

Par exemple l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est un modèle de $\{+, \times, 0, 1, <\}$, de plus il satisfait les formules suivantes :

$$(\forall x, y)\Big(x < y \Longrightarrow (\exists z)(x < z < y)\Big)$$

$$(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$$

$$(\forall x, y, z)(y < z \Longrightarrow x + y < x + z)$$

$$(\forall x, y)(x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } y < x)$$

et bien d'autres.

NOTATION 2.2.2. Si $\mathscr{L}$ est un type de similarité, nous notons $(A, \mathscr{L})$ pour dire que A est une $\mathscr{L}$-algèbre. Si $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{L}$, nous notons $(A, \mathscr{L}')$ la $\mathscr{L}'$-algèbre, ayant le même ensemble sous-jacent que A, mais dans laquelle l'ensemble des lois est restreint à $\mathscr{L}'$.

THÉORÈME 2.2.3 (Löwenheim-Skolem). *Soit $\mathscr{L}$ un langage, soit M un modèle de $\mathscr{L}$, soit $X \subseteq M$, alors il existe N une sous-structure élémentaire de M tel que $X \subseteq N$ et* $\operatorname{card} N \leq \operatorname{card} X + \operatorname{card} \mathscr{L} + \aleph_0$.

DÉFINITION 2.2.4. Soit $\mathcal{K}$ une classe d'algèbres de même type de similarité. Une algèbre $K \in \mathcal{K}$ est *projective dans* $\mathcal{K}$ si pour tout morphisme surjectif $f : A \twoheadrightarrow B$ d'algèbres dans $\mathcal{K}$ et tout morphisme d'algèbres $g : K \to B$, il existe un morphisme $h : K \to A$ tel que $f \circ h = g$. Si $\mathcal{K}$ est comprise, nous dirons simplement K est *projective*.

DÉFINITION 2.2.5. Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité. Un *terme* est une expression bien formée en les symboles de lois de $\mathscr{L}$ et des symboles de variables, généralement prise dans la famille $(x_k)_{k \in \omega}$.

Une *identité* est un couple de terme, généralement noté $t_1 = t_2$. Si les variables apparaissant dans t_1 et t_2 sont dans $\{x_1, \dots x_n\}$, nous notons l'identité $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots x_n)$.

Une $\mathscr{L}$-algèbre *satisfait* l'identité $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots x_n)$ si elle satisfait la formule $(\forall x_1, \dots, x_n)(t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots x_n))$.

Une *variété* de $\mathscr{L}$-algèbres est la classe de toutes les $\mathscr{L}$-algèbres satisfaisant un ensemble d'identités fixé.

Voici quelques exemples d'identités, si $*$ est un symbole de loi binaire, et 0 est un symbole de constante :

$$x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3 \qquad (* \text{ est associative})$$
$$x * x = x \qquad (* \text{ est idempotente})$$
$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1 \qquad (* \text{ est commutative})$$
$$x * 0 = x \qquad (0 \text{ est neutre à droite pour } *)$$
$$0 * x = x \qquad (0 \text{ est neutre à gauche pour } *)$$
$$x * 0 = 0 \qquad (0 \text{ est absorbant à droite pour } *)$$
$$0 * x = 0 \qquad (0 \text{ est absorbant à gauche pour } *)$$

On dit que 0 est neutre pour $*$ s'il est neutre à gauche et à droite. On dit que 0 est absorbant pour $*$ s'il est absorbant à droite et à gauche.

Une algèbre $(G, *, {}^{-1}, 1)$ est un *groupe* si $*$ est une loi binaire associative, 1 est une constante neutre pour $*$ et elle satisfait les identités supplémentaires suivantes $x * x^{-1} = 1$ et $x^{-1} * x = 1$.

Une algèbre $(G, +, -, 0)$ est un *groupe abélien* si $+$ est une loi binaire associative et commutative, $-$ est une loi unaire et 0 est une constante neutre pour $+$ et elle satisfait les identités supplémentaires suivantes $x + (-x) = 0$ et $(-x) + x = 0$. Nous notons alors

$x - y$ au lieu de $x + (-y)$. Une algèbre $(M, +, 0)$ est un *monoïde commutatif* si $+$ est une loi binaire associative et commutative et 0 est une constante neutre pour $+$.

Une algèbre $(R, +, -, \cdot, 0)$ est un *anneau* si $(R, +, 0)$ est un groupe abélien et $\cdot$ est une loi binaire associative et elle satisfait les identités suivantes $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ et $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$. Nous notons généralement xy au lieu de $x \cdot y$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois nous noterons R est un anneau. Une algèbre $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ est un *anneau unitaire* si $(R, +, -, \cdot, 0)$ est un anneau et 1 est une constante neutre pour $\cdot$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur les lois nous noterons R est un anneau unitaire.

Soit R un anneau, nous notons $R^{\mathrm{op}} = (R, +, -, \cdot^{\mathrm{op}}, 0)$ où $\cdot^{\mathrm{op}}$ est défini par $x \cdot^{\mathrm{op}} y = y \cdot x$ pour tous $x, y \in R$. Cela nous définit un anneau. Si R est un anneau unitaire, nous construisons de manière analogue un anneau unitaire R^{op}.

Considérons le type de similarité $\{m\}$ où m est un symbole de loi ternaire. Une *algèbre de majorité* est une $\{m\}$-algèbre satisfaisant les identités suivantes :

$$m(x, x, y) = m(x, y, x) = m(y, x, x) = x$$

Un *sous-groupe* (resp., *sous-anneau*, *sous-anneau unitaire*, *sous-algèbre de majorité*) est une sous-algèbre d'un groupe (resp., anneau, anneau unitaire, algèbre de majorité).

La classe des groupes, la classe des anneaux, la classe des anneaux unitaires, la classe des algèbres de majorité, la classe des K-espaces vectoriels, où K est un corps fixé, forment des variétés. Par contre la classe des corps n'est pas une variété.

DÉFINITION 2.2.6. Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité, soit $\mathcal{K}$ une classe de $\mathscr{L}$-algèbres. La *variété engendrée par* $\mathcal{K}$, notée $\mathbf{Var}(\mathcal{K})$, est la classe des $\mathscr{L}$-algèbres satisfaisant toute les identités satisfaites par toutes les algèbres de $\mathcal{K}$. C'est la plus petite variété contenant $\mathcal{K}$. Nous la notons aussi parfois $\mathbf{Var}_S(\mathcal{K})$ s'il y a ambiguïté sur l'utilisation des symboles de lois dans S.

Une variété est *finiment engendrée* si elle est de la forme $\mathbf{Var}(\mathcal{K})$ où $\mathcal{K}$ est une classe finie d'algèbres finies.

Si $\mathcal{K} = \{A\}$, nous notons $\mathbf{Var}(A)$ au lieu de $\mathbf{Var}(\mathcal{K})$.

DÉFINITION 2.2.7. Soit $(A_x)_{x\in X}$ est une famille d'algèbres, posons $A = \prod_{x\in X} A_x$, notons $\pi_x \colon A \twoheadrightarrow A_x$ la projection canonique. Une algèbre B est *produit sous-direct de* $(A_x)_{x\in X}$ s'il existe $f \colon B \hookrightarrow A$ telle que $\pi_x \circ f$ soit surjectif pour tout $x \in X$.

NOTATIONS 2.2.8. Soit $\mathcal{K}$ une classe d'algèbres de même type de similarité.
– Notons $\mathbf{H}\mathcal{K}$ la classe de toutes les algèbres isomorphes à un quotient d'une algèbre de $\mathcal{K}$.
– Notons $\mathbf{S}\mathcal{K}$ la classe de toutes les algèbres isomorphes à une sous algèbre d'une algèbre de $\mathcal{K}$.
– Notons $\mathbf{P}\mathcal{K}$ la classe de toutes les algèbres isomorphes à un produit d'algèbres de $\mathcal{K}$.
– Notons $\mathbf{P_S}\mathcal{K}$ la classe de tous les produits sous-directs de toutes les familles d'algèbres de $\mathcal{K}$.

Si $\mathcal{V}$ est une variété d'algèbres alors $\mathbf{H}\mathcal{K} = \mathbf{S}\mathcal{K} = \mathbf{P}\mathcal{K} = \mathcal{V}$. Birkhoff a démontré que la conjonction de ces égalités caractérise les variétés. Par suite Tarski montra que

$$\mathbf{Var}(\mathcal{K}) = \mathbf{HSP}\mathcal{K}$$

et Kogalovskiĭ améliora ce résultat en prouvant

$$\mathbf{Var}(\mathcal{K}) = \mathbf{HP_S}\mathcal{K}.$$

2.3. Ensembles ordonnés et treillis

Définition 2.3.1. Un *ensemble ordonné* $(P, \leq)$ est un ensemble P muni d'une relation binaire $\leq$ satisfaisant les formules suivantes :

$$(\forall x)(x \leq x) \qquad \text{(réflexive)}$$

$$(\forall x, y, z)\big((x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z\big) \qquad \text{(transitive)}$$

$$(\forall x, y)\big((x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y\big) \qquad \text{(antisymétrique)}$$

La relation $\leq$ est appelée *relation d'ordre*. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrivons P au lieu de $(P, \leq)$ et nous notons $\leq$ la relation d'ordre. Une *relation de pré-ordre* est une relation réflexive et transitive. Si P et Q sont des ensembles ordonnés, une application $f\colon P \to Q$ est *croissante* ou *isotone* si $f(x) \leq f(y)$ pour tous $x \leq y$ dans P.

Si $\leq$ est une relation d'ordre, alors *l'ordre réciproque*, généralement noté $\geq$ est défini par $a \geq b$ si et seulement si $b \leq a$ pour tous $a, b \in P$. Le *dual de* P est l'ensemble ordonné $(P, \geq)$.

La relation d'ordre $\leq$ est *totale* si la formule suivante est satisfaite dans P :

$$(\forall x, y)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$$

Un ensemble ordonné P est une *chaîne* si l'ordre de P est total. La *longueur* de P est $\operatorname{lh}(P) = \sup\{(\operatorname{card} C) - 1 \mid C \subseteq P \text{ est une chaîne}\}$; nous notons $\operatorname{lh} P = \infty$ s'il y a des chaînes arbitrairement grandes.

Soit $Q \subseteq P$. Un *majorant de* Q est un élément $p \in P$ tel que $q \leq p$ pour tout $q \in Q$. Si de plus $p \in Q$, alors p est *le plus grand élément de* Q. Comme $\leq$ est antisymétrique, alors il y a bien unicité du plus grand élément. Nous définissons dualement, en utilisant l'ordre réciproque, *minorant* de Q et *plus petit élément de* Q. Un ensemble ordonné P est *bien ordonné* si toute partie non vide a un plus petit élément. Si P est un ensemble ordonné, nous notons P^- la partie de P formée des éléments non minimaux et $P^=$ la partie de P formée des éléments non maximaux.

La *borne supérieure de* Q est le plus petit des majorants, noté $\bigvee Q$ s'il existe. Dualement, la *borne inférieure de* Q est le plus grand des minorants noté $\bigwedge Q$, s'il existe. Si $Q = \{x, y\}$, nous notons, quand il n'y a pas ambiguïté, $x \wedge y$ la borne inférieure de Q et $x \vee y$ la borne supérieure de Q.

Soit P un ensemble ordonné. Soient $x \leq y$ dans P, nous notons $[x, y]_P = \{t \in P \mid x \leq t \leq y\}$, ou simplement $[x, y]$ si P est compris, un tel ensemble est appelé *intervalle de* P. Un *successeur* de $x \in P$ est un élément $y > x$ de P tel que $[x, y] = \{x, y\}$, nous notons alors $y \succ x$, nous dirons aussi que x est un *prédécesseur immédiat* de y et noterons $x \prec y$.

Soit P un ensemble ordonné, soient Q, R des parties de P, nous posons :

$$Q \downarrow R = \{x \in Q \mid q \leq r \text{ pour un } r \in R\}.$$

$$Q \uparrow R = \{x \in Q \mid q \geq r \text{ pour un } r \in R\}.$$

Un ensemble ordonné T est un *arbre* s'il a un plus petit élément et $T \downarrow t$ est une chaîne pour tout $t \in T$. Un ensemble ordonné P est *bien fondé* si toute partie non vide de P a un élément minimal. On dit que P est *initialement fini* si $P \downarrow p$ est fini pour tout $p \in P$. Une partie I de P est *filtrante croissante* si pour tous x et y dans I il existe $z \in I$ tel que $z \geq x$ et $z \geq y$. Un *idéal* de P est une partie non vide filtrante croissante I de P telle que $P \downarrow I = I$. Nous notons $\operatorname{Id} P$ l'ensemble des idéaux de P. Soit $p \in P$, alors $P \downarrow p$ est *l'idéal engendré par* p, un tel idéal est appelé *idéal principal*. L'idéal I est *propre* si $I \neq P$.

Dualement un *filtre* de P est un idéal du dual de P. Un filtre de P est donc une partie non vide F de P tel que $P \uparrow F = F$ et pour tous $x, y \in F$ il existe $z \in F$ tel que $x, y \geq z$. Nous définissons aussi les filtres principaux. Soit $p \in P$, alors $P \uparrow p$ est *le filtre engendré par* p, un tel filtre est appelé *filtre principal*. Le filtre F est *propre* si $F \neq P$.

Définition 2.3.2. Un *sup-demi-treillis* est une $\vee$-algèbre D telle que $\vee$ est associative, commutative et idempotente. Un $(\vee, 0)$-*demi-treillis* est une $\{\vee, 0\}$-algèbre D telle que D est un sup-demi-treillis et 0 est neutre pour $\vee$. Un $(\vee, 0, 1)$-*demi-treillis* est une $\{\vee, 0, 1\}$-algèbre D telle que D est un $(\vee, 0)$-demi-treillis et 1 est absorbant pour $\vee$.

Les classes de tous les sup-demi-treillis, tous les $(\vee, 0)$-demi-treillis et tous les $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis, respectivement forment des variétés d'algèbres.

Proposition 2.3.3. *Soit D un sup-demi-treillis. On définit la relation $\leq$ par $x \leq y \iff y = x \vee y$. Alors $(D, \leq)$ est un ensemble ordonné, de plus pour tous $x, y \in D$, la partie $\{x, y\}$ a $x \vee y$ comme borne supérieure. Si 0 est neutre pour $\vee$ alors 0 est le plus petit élément de D. Si 1 est absorbant pour $\vee$ alors 1 est le plus grand élément de D.*

Réciproquement si $(D, \leq)$ est un ensemble ordonné tel que pour tous $x, y \in D$, l'ensemble $\{x, y\}$ a une borne supérieure, notée $x \vee y$, alors D est un sup-demi-treillis. Si de plus D a un plus petit élément, alors D est un $(\vee, 0)$-demi-treillis. Si D a aussi un plus grand élément alors D est un $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis.

Dans la suite nous utiliserons la structure d'ensemble ordonné et la structure d'algèbre des $(\vee, 0)$-demi-treillis.

Définition 2.3.4. Un *treillis* est un ensemble ordonné $(P, \leq)$ tel que la borne supérieure et la borne inférieure de $\{x, y\}$ existent, elles sont alors notées $x \vee y$ et $x \wedge y$ pour tous $x, y \in P$.

Proposition 2.3.5. *Soit L un treillis, alors les lois binaires $\wedge$ et $\vee$ vérifient les identités suivantes :*

$$x \vee x = x \qquad x \wedge x = x \tag{2.3.1}$$
$$x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x \tag{2.3.2}$$
$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \tag{2.3.3}$$
$$x \wedge (x \vee y) = x \qquad x \vee (x \wedge y) = x \tag{2.3.4}$$

Si de plus L a un plus petit élément 0 alors 0 est absorbant pour $\wedge$ et 0 est neutre pour $\vee$. Si L a un plus grand élément 1 alors 1 est neutre pour $\wedge$ et absorbant pour $\vee$.

Soit L une $(\vee, \wedge)$-algèbre vérifiant les identités (2.3.1)-(2.3.4), alors L est un treillis pour l'ordre défini par $x \leq y \iff x \vee y = y$ pour tous $x, y \in L$. La borne supérieure de $\{x, y\}$ est $x \vee y$, la borne inférieure de $\{x, y\}$ est $x \wedge y$. Si nous avons un élément 0 neutre pour $\vee$ ou absorbant pour $\wedge$, alors 0 est le plus petit élément de L. Similairement si nous avons un élément 1 absorbant pour $\vee$ ou neutre pour 0 alors 1 est le plus grand élément.

En particulier la classe de tous les treillis, (resp., les treillis minorés, resp., les treillis majorés, resp., les treillis bornés) est une variété de $\{\vee, \wedge\}$-algèbres (resp., $\{\vee, \wedge, 0\}$-algèbres, resp., $\{\vee, \wedge, 1\}$-algèbres, resp., $\{\vee, \wedge, 0, 1\}$-algèbres). Dans la suite nous utiliserons la structure d'ensemble ordonné et la structure d'algèbre des treillis.

La proposition suivante est montrée dans [**13**, Lemma I.4.8].

Proposition 2.3.6. *Soit L un treillis, alors $\operatorname{Id} L$ est un treillis qui satisfait les mêmes identités que L.*

En particulier si $\mathcal{V}$ est une variété de treillis et $L \in \mathcal{V}$ alors $\operatorname{Id} L \in \mathcal{V}$.

Définition 2.3.7. Soit L un treillis. Le *dual de L*, noté L^{d}, est le treillis dont l'ordre est l'ordre réciproque de celui de L. Cela revient à échanger les lois $\vee$ et $\wedge$ de L.

Le *dual d'une identité* est l'identité dans laquelle on a échangé les symboles $\vee$ et $\wedge$.

Si $\mathcal{V}$ est une variété de treillis alors le *dual de $\mathcal{V}$*, notée par $\mathcal{V}^{\mathrm{d}}$, est la classe des duaux des treillis de $\mathcal{V}$. C'est la variété de tous les treillis satisfaisant les identités duales des identités de $\mathcal{V}$.

Définition 2.3.8. Un treillis L est *distributif* s'il satisfait l'identité suivante :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Un treillis L est *modulaire* s'il satisfait l'identité suivante :

$$x \wedge ((x \wedge y) \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Un treillis L est *arguésien* s'il satisfait l'identité suivante :

$$(a_0 \vee b_0) \wedge (a_1 \vee b_1) \wedge (a_2 \vee b_2) \leq (a_0 \wedge (a_1 \vee d)) \vee (b_0 \wedge (b_1 \vee d)),$$

où d désigne $(a_0 \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge \Big(\big((a_1 \vee a_2) \wedge (b_1 \vee b_2)\big) \vee \big((a_0 \vee a_2) \wedge (b_0 \vee b_2)\big)\Big)$.

REMARQUE 2.3.9. Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 \leq t_2$ est équivalent à l'identité $t_1 \wedge t_2 = t_1$.

Tout treillis distributif est arguésien. Tout treillis arguésien est modulaire.

Si L est distributif alors :

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{par (2.3.4).} \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{car } L \text{ est distributif.} \\ &= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{par (2.3.4).} \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) && \text{car } L \text{ est distributif.} \end{aligned}$$

Donc tout treillis distributif est dualement distributif.

Soit L un treillis modulaire alors :

$$\begin{aligned} x \vee ((x \vee y) \wedge z) &= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{par (2.3.4).} \\ &= (x \vee y) \wedge ((x \wedge (x \vee y)) \vee z) && \text{car } L \text{ est modulaire.} \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) && \text{par (2.3.4).} \end{aligned}$$

Donc tout treillis modulaire est dualement modulaire.

Le théorème suivant a été montré par Stone.

THÉORÈME 2.3.10 (Stone). *La variété de tous les treillis distributifs est la plus petite variété non-triviale de treillis.*

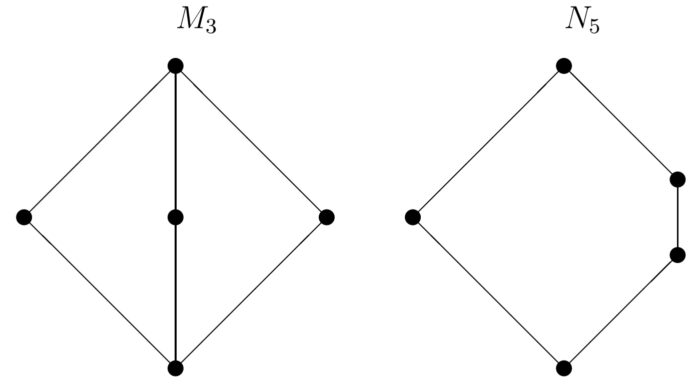

FIGURE 2.1. Les treillis M_3 et N_5.

Le treillis M_3 est modulaire mais pas distributif. Le treillis N_5 n'est ni modulaire ni distributif. Nous notons $\mathcal{M}_3$ la variété de treillis engendrée par M_3 et $\mathcal{N}_5$ la variété de treillis engendrée par N_5.

Le théorème suivant montre que M_3 est N_5 sont minimaux pour ces propriétés. En particulier cela implique que $\mathcal{M}_3$ est la plus petite variété de treillis modulaires non distributive et $\mathcal{N}_5$ est la plus petite variété de treillis non modulaires. On en trouve une preuve dans [**13**, Theorem II.1.2].

Théorème 2.3.11. *Un treillis L est modulaire si et seulement si aucun de ses sous-treillis n'est isomorphe à N_5.*

Un treillis L est distributif si et seulement s'il n'a aucun sous-treillis isomorphe à M_3 ou N_5.

Définition 2.3.12. Soit L un treillis. Un élément $x \in L$ est *inf-irréductible* si pour toute partie finie X de L vérifiant $\bigwedge X = x$, nous avons $x \in X$.

Un élément $x \in L$ est *complètement inf-irréductible* si pour toute partie X de L vérifiant $\bigwedge X = x$, nous avons $x \in X$.

L'ensemble de tous les éléments complètement inf-irréductible de L est noté $\mathrm{M}(L)$.

Si x est complètement inf-irréductible, alors $\bigwedge_{y>x} y$ existe, cet élément est noté x^*, nous avons alors $x \prec x^*$.

En fait x^* est le plus petit élément strictement plus grand que x, c'est le seul successeur de x.

Définition 2.3.13. Un treillis L est *complet*, si toute partie $Q \subseteq L$ a une borne supérieure et une borne inférieure.

Un élément $x \in L$ est *compact* si lorsque $x \leq \bigvee X$ pour une partie X de L alors $x \leq \bigvee Y$ pour une partie finie Y de X. L'ensemble des éléments compacts de L, noté $\mathrm{C}(L)$, est alors un $(\vee, 0)$-demi-treillis pour la restriction de l'ordre de L.

Un treillis complet L est *algébrique* si tout élément x de L s'écrit $x = \bigvee Q$ pour une certaine partie Q de $\mathrm{C}(L)$.

Soit A et B des treillis algébrique. Un *morphisme de treillis algébriques* est une application $f\colon A \to B$ telle que $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$ pour tout $X \subseteq A$, et $f(x)$ est compact pour tout $x \in \mathrm{C}(A)$. Un tel morphisme ne préserve pas en général l'opération de borne inférieure.

Par exemple si E est un ensemble alors $\mathfrak{P}(E)$ est un treillis algébrique. Les éléments compacts sont les parties finies de E. Si D est un $(\vee, 0)$-demi-treillis alors l'ensemble des idéaux de D, noté $\operatorname{Id} D$, est un treillis algébrique, dont les éléments compacts sont les idéaux principaux.

Si G est un groupe alors l'ensemble $\operatorname{Sub} G$ des sous-groupes de G est un treillis algébrique, dont les éléments compacts sont les sous-groupes finiment engendrés. De manière similaire, si V est un espace vectoriel alors $\operatorname{Sub} V$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V est un treillis algébrique, les éléments compacts sont les sous-espaces vectoriels finiment engendrés, c'est à dire de dimension finie.

Définition 2.3.14. Soit $\phi\colon D \to D'$ un morphisme de $(\vee, 0)$-demi-treillis. Nous notons $\operatorname{Id}\phi\colon \operatorname{Id} D \to \operatorname{Id} D'$ l'application qui à $I \in \operatorname{Id} D$ associe l'idéal de D' engendré par $\phi(I) = \{\phi(x) \mid x \in I\}$.

Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de treillis algébriques. Nous notons $\mathrm{C}(f)\colon\ \mathrm{C}(A) \to \mathrm{C}(B)$ la restriction de f de $\mathrm{C}(A)$ vers $\mathrm{C}(B)$.

Théorème 2.3.15. *Soit $\mathscr{S}$ la catégorie des $(\vee, 0)$-demi-treillis, soit $\mathscr{A}$ la catégorie des treillis algébriques. Alors Id et C sont des foncteurs qui définissent une équivalence de catégories entre les catégories $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$.*

La notion de distributivité des treillis s'étend aux $(\vee, 0)$-demi-treillis. Cette notion ne s'exprime plus avec des identités, mais avec une formule du premier ordre.

La proposition suivante est montrée dans [**13**, Lemma II.5.1].

DÉFINITION 2.3.16. Un $(\vee, 0)$-demi-treillis D est *distributif* si pour tous x, y, z dans D tels que $x \leq y \vee z$, il existe y', z' dans D tels que $y' \leq y$, $z' \leq z$ et $x = y' \vee z'$.

La proposition suivante montre le lien entre la distributivité pour les treillis et celle pour les $(\vee, 0)$-demi-treillis.

PROPOSITION 2.3.17. *Soit D un $(\vee, 0)$-demi-treillis, alors D est distributif si et seulement si* $\operatorname{Id} D$ *est distributif.*

Soit L un treillis algébrique, alors L est distributif si et seulement si $\mathrm{C}(L)$ *est distributif.*

DÉFINITION 2.3.18. Soit L un treillis, un idéal N de L est *neutre*, si le sous-treillis de $\operatorname{Id} L$ engendré par N, I, J est distributif pour tous $I, J \in \operatorname{Id} L$.

Nous notons $\operatorname{NId}(L)$ l'ensemble de tous les idéaux neutres de L.

DÉFINITION 2.3.19. Soit L un treillis borné, soit $x \in L$. Notons 0 le plus petit élément de L et 1 le plus grand élément de L. Un *complément* de x est un élément $y \in L$ tel que $x \wedge y = 0$ et $x \vee y = 1$.

Un treillis L est *complémenté* si tout élément a au moins un complément. Un treillis L est *uniquement complémenté* si tout élément a exactement un complément.

Un treillis L est *sectionnellement complémenté* s'il a un plus petit élément (ici noté 0) et pour tout $x \in L$, le treillis $[0, x] = \{t \in L \mid 0 \leq t \leq x\}$ est complémenté.

Un treillis L est *booléen* s'il est distributif et complémenté.

REMARQUE 2.3.20. Le treillis M_n pour tout $n \geq 3$ (cf. Figure 4.3) est complémenté mais pas uniquement complémenté.

Tout treillis booléen est uniquement complémenté. Si X est un ensemble, alors $\mathfrak{P}(X)$ est un treillis booléen. Si X est un ensemble fini, alors $\mathfrak{P}(X)$ est un treillis booléen fini, de plus tout treillis booléen fini est isomorphe à un tel treillis.

NOTATION 2.3.21. Soit L un treillis avec 0, soient a, b, c dans L tels que $b \leq a$, nous noterons $a = b \oplus c$ si $a = b \vee c$ et $0 = b \wedge c$.

REMARQUE 2.3.22. Par définition, si L est sectionnellement complémenté, alors pour tous $a \leq b$ dans L, il existe $c \in L$ tel que $a = b \oplus c$. Cependant un tel élément n'est pas en général unique.

LEMME 2.3.23. *Soient K et L des treillis sectionellement complémentés, soit $f \colon K \to L$ un morphisme de treillis préservant* 0, *alors f est injective si et seulement si f sépare* 0 *(i.e. $f(x) = 0$ implique $x = 0$ pour tout $x \in K$).*

DÉFINITION 2.3.24. Soit L un treillis. Soient a, b, x dans L. Les éléments a et b sont *perspectifs relativement à x* si $a \wedge x = b \wedge x$ et $a \vee x = b \vee x$. Nous notons alors $a \sim_x b$.

Soient a, b dans L. Les éléments a et b sont *perspectifs* s'il existe $x \in L$ tel que $a \sim_x b$. Nous notons alors $a \sim b$.

PROPOSITION 2.3.25. *Soit L un treillis sectionnellement complémenté. Un idéal I de L est neutre si et seulement s'il est clos par perspectivité, c'est à dire pour tous a et b éléments perspectifs de L si $a \in I$ alors $b \in I$.*

La proposition suivante est prouvée dans [**1**, Theorem III.13.20] et [**13**].

PROPOSITION 2.3.26. *Si L est un treillis modulaire sectionellement complémenté, alors* $\mathrm{Con}\, L \cong \mathrm{NId}\, L$.

DÉFINITION 2.3.27. Un treillis L satisfait la *condition de Whitman* si pour tous a, b, c et d dans L :

$$a \wedge b \leq c \vee d \quad \text{implique soit } a \leq c \vee d \quad \text{soit} \quad b \leq c \vee d \quad \text{soit} \quad a \wedge b \leq c \quad \text{soit} \quad a \wedge b \leq d.$$

Cette condition a été introduite par Whitman parmi quatre autres pour caractériser les treillis libres. Comme l'illustre la proposition suivante d'autres treillis vérifient cette condition.

PROPOSITION 2.3.28. *Le treillis M_n satisfait la condition de Whitman pour tout $n \geq 3$.*

Rappelons la notion de projectivité pour un treillis.

DÉFINITION 2.3.29. Soit $\mathcal{K}$ une classe de treillis. Un treillis $L \in \mathcal{K}$ est *projectif dans $\mathcal{K}$* si pour tout morphisme surjectif $f\colon A \twoheadrightarrow B$ de treillis dans $\mathcal{K}$ et tout morphisme de treillis $g\colon L \to B$, il existe un morphisme $h\colon L \to A$ tel que $f \circ h = g$.

En particulier si L est un treillis projectif dans $\mathcal{K}$, pour tout $A \in \mathcal{K}$ et tout morphisme surjectif $f\colon A \twoheadrightarrow L$ il existe un morphisme injectif $h\colon L \hookrightarrow A$ tel que $f \circ h = \mathrm{id}_L$ (en particulier, L est un *rétracte* de A).

Davey et Sands ont montré dans [**4**, Theorem 1] un lien entre la condition de Whitman et la projectivité.

THÉORÈME 2.3.30 (Davey-Sands). *Soit $\mathcal{K}$ la classe de tous les treillis sans chaînes infinies. Un treillis $L \in \mathcal{K}$ est projectif dans $\mathcal{K}$ si et seulement s'il satisfait la condition de Whitman.*

DÉFINITION 2.3.31. Une 2-échelle I est un treillis initialement fini, tel que tout élément a au plus deux prédécesseur immédiat.

Nous utiliserons dans cette thèse une 2-échelle comme indexe de système filtrant croissant. Ditor a démontré le lemme suivant dans dans [**3**], en utilisant le lemme de Zorn.

LEMME 2.3.32. *Il existe une 2-échelle de cardinal $\aleph_1$.*

2.4. Congruences

NOTATION 2.4.1. Soit X un ensemble et θ est une relation d'équivalence sur X, soit $x \in X$. La *classe d'équivalence de x modulo θ* est $x/\theta = \{y \in X \mid (x, y) \in \theta\}$, un tel ensemble est appelé une *classe d'équivalence de α*. Si $X' \subseteq X$, nous notons $X'/\theta = \{x/\theta\}x \in X'$, ainsi X/θ est l'ensemble de toutes les classes d'équivalences de α.

DÉFINITION 2.4.2. Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité, soit A une $\mathscr{L}$-algèbre. Une *congruence de* A est une relation d'équivalence α de A telle que si $(a_k, b_k) \in \alpha$ pour tous $1 \leq k \leq n$, alors $(\ell(a_1, \dots, a_n), \ell(b_1, \dots, b_n)) \in \alpha$ pour toute loi n-aire $\ell \in \mathscr{L}$.

Le *treillis des congruences de* A est l'ensemble de toutes les congruences de A avec comme ordre l'inclusion, ce qui lui donne une structure de treillis, noté $\operatorname{Con} A$.

Le *quotient de* A par α, noté A/α, est l'ensemble des classes d'équivalence de α.

Soit $X \subseteq A^2$, alors $\bigcap\{\alpha \in \operatorname{Con} A \mid \alpha \supseteq X\}$ est une congruence appelée *congruence engendrée par* X et notée $\Theta_A(X)$, c'est la plus petite congruence contenant X.

Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de treillis, nous posons :

$$\begin{aligned} \operatorname{Con} f\colon\ \operatorname{Con} A &\to \operatorname{Con} B \\ \alpha &\mapsto \Theta_B(\{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in \alpha\}) \end{aligned}$$

Une congruence α est *finiment engendrée* si elle s'écrit $\Theta_A(X)$ pour un certain $X \subseteq A^2$ fini. Nous notons $\operatorname{Con_c} A$ l'ensemble des congruences finiment engendrées de A, c'est un $(\vee, 0)$-demi-treillis. Si $B \subseteq A$ nous notons ${\operatorname{Con_c}}^B(A) = \{\Theta_A(X) \mid X \in [B^2]^{<\omega}\}$ l'ensemble des congruences de A finiment engendrées par des paramètres dans B.

Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de treillis, nous posons $\operatorname{Con_c} f\colon \operatorname{Con_c} A \to \operatorname{Con_c} B$ la restriction de $\operatorname{Con} f$ de $\operatorname{Con_c} A$ vers $\operatorname{Con_c} B$. C'est un morphisme de $(\vee, 0)$-demi-treillis.

Posons $f^{-1}(\beta) = \{(x, y) \in A^2 \mid (f(x), f(y)) \in \beta\}$, c'est une congruence de A.

Le *noyau* de f est $\ker f = f^{-1}(\mathrm{id}_B) = \{(x, y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\}$.

Si G est un groupe alors les congruences de G correspondent aux sous-groupes normaux de G. En fait si N est un sous-groupe normal de G, alors la relation θ_N défini par $(x, y) \in \theta_N$ si et seulement si $xy^{-1} \in N$ est une congruence de G. Réciproquement si θ est une congruence de G, alors $N_\theta = \{x \in G \mid (x, e) \in \theta\}$ (où e désigne l'élément neutre de G) est un sous-groupe normal de G.

Si A est un anneau, alors les congruences de A correspondent aux idéaux bilatères de A, cela se fait de manière analogue au cas des groupes (cf. Proposition 2.7.4).

Le lemme suivant montre qu'on peut reconnaître qu'un morphisme f injectif en connaissant seulement $\operatorname{Con_c} f$. Un morphisme ϕ de $(\vee, 0)$-demi-treillis *sépare* 0 si le seul élément ayant pour image 0 par ϕ est 0.

LEMME 2.4.3. *Soit $f\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres, alors f est injective si et seulement si* $\operatorname{Con_c} f$ *sépare* 0*.*

THÉORÈME 2.4.4 (Birkhoff). *Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité, soit A une $\mathscr{L}$-algèbre. Alors* $\operatorname{Con} A$ *est un treillis algébrique. Les congruences compactes de* $\operatorname{Con} A$ *sont les congruences finiment engendrées de A.*

En utilisant le Théorème 2.3.15 nous obtenons alors $\operatorname{Con} A \cong \operatorname{Id} \operatorname{Con_c} A$. Cela montre que pour avoir une bonne compréhension de $\operatorname{Con} A$ il suffit de connaître $\operatorname{Con_c} A$.

PROPOSITION 2.4.5. *Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité. Soit A une $\mathscr{L}$-algèbre. Soit α une congruence de A, alors A/α a une structure de $\mathscr{L}$-algèbre. L'application $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\alpha$, $x \mapsto x/\alpha$ est un morphisme surjectif d'algèbres, appelée* projection canonique.

L'application $\operatorname{Con} \pi$ *induit un isomorphisme* $(\operatorname{Con} A) \uparrow \alpha \to \operatorname{Con}(A/\alpha)$.

Notation 2.4.6. Soient $\alpha \subseteq \beta$ des congruences de A. La *congruence quotient de β par α* est la congruence de A/α définie par $\beta/\alpha = (\operatorname{Con}\pi)(\beta)$, où $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\alpha$ est la projection canonique.

Proposition 2.4.7. *Soit $f\colon A \to B$ un morphisme d'algèbres. Soit $\alpha \in \operatorname{Con} A$, soit $\beta \in \operatorname{Con} B$. Si $(\operatorname{Con} f)(\alpha) \subseteq \beta$, alors $g\colon A/\alpha \to B/\beta$, $x/\alpha \mapsto f(x)/\beta$ définit un morphisme d'algèbres. Notons $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\alpha$ et $\pi'\colon B \twoheadrightarrow B/\beta$ les projections canoniques, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[d, "\pi'"] \\ A/\alpha \arrow[r, "g"'] & B/\beta \end{tikzcd}$$

Proposition 2.4.8. *Soit B une algèbre, soit A une sous-algèbre de B, notons $f\colon A \to B$ le morphisme d'inclusion. Soit $\theta \in \operatorname{Con} B$, alors $\theta \cap (A \times A) = f^{-1}(\theta)$. Nous notons alors $A/\theta = \{a/\theta \mid a \in B\}$, c'est une sous-algèbre de B/θ. Dans la suite nous noterons A/θ au lieu de $A/\theta \cap (A \times A)$.*

Soit A une algèbre, soit $\theta \in \operatorname{Con} A$, soit $X \subseteq A$. Nous notons $X/\theta = \{x/\theta \mid x \in X\}$, la Proposition 2.4.8 montre qu'il n'y a pas d'ambiguïté, même pour X sous-algèbre de A.

Si α et β sont des relations de A, nous notons $\alpha \circ \beta$ la composée de relations définie de la manière suivante :

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in A^2 \mid (\exists z \in A)((x, z) \in \alpha \text{ et } (z, y) \in \beta\}.$$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres de même type de similarité. Soit α_i une congruence de A_i, pour tout $i \in I$. Nous notons $\prod_{i \in I} \alpha_i$ la congruence de $\prod_{i \in I} A_i$ définie de la manière suivante :

$$\prod_{i \in I} \alpha_i = \left\{ \Big((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}\Big) \in \prod_{i \in I} A_i \times \prod_{i \in I} A_i \mid \Big(\forall i \in I\Big)\Big((x_i, y_i) \in \alpha_i\Big) \right\}$$

Définition 2.4.9. Soit A une algèbre, soit $n \in \omega$. L'algèbre A est *congruence n-permutable* si pour tous α et β dans $\operatorname{Con} A$ nous avons :

$$\underbrace{\alpha \circ \beta \circ \alpha \circ \dots}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\beta \circ \alpha \circ \beta \dots}_{n \text{ fois}}$$

L'algèbre A est *congruence-permutable* si elle est congruence 2-permutable, c'est à dire que pour tous α, β dans $\operatorname{Con} A$ nous avons $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Par exemple tous les groupes sont congruence-permutables. La chaîne à trois éléments en tant que treillis est congruence 3-permutable, mais n'est pas congruence-permutable. Une chaîne infinie en tant que treillis n'est congruence n-permutable pour aucun entier n.

Définition 2.4.10. Une algèbre A est *congruence-distributive* si $\operatorname{Con} A$ est distributif (ou de manière équivalente $\operatorname{Con_c} A$ est distributif). Une variété d'algèbres $\mathcal{V}$ est *congruence-distributive* si toutes les algèbres de $\mathcal{V}$ sont congruence-distributives.

Exemple 2.4.11. La variété de tous les treillis est congruence-distributive (Funayama et Nakayama dans [**9**]). La variété de toutes les algèbres de majorité est congruence-distributive (Jónsson [**24**]).

Exemple 2.4.12. Posons $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le treillis des congruences de G est isomorphe à $\operatorname{Sub} G$, lui-même isomorphe à M_3. Ce treillis n'est pas distributif (cf. Théorème 2.3.11), donc G n'est pas congruence-distributif.

Lemme 2.4.13. *Soit A et B deux algèbres, supposons que $A \times B$ soit congruence-distributive, alors :*

$$\begin{aligned} \operatorname{Con} A \times \operatorname{Con} B &\to \operatorname{Con}(A \times B) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \times \beta, \end{aligned} \qquad \textit{est un isomorphisme.}$$

Remarque 2.4.14. Comme l'illustre l'exemple 2.4.12, il faut bien supposer que $A \times B$ est congruence-distributive, car en posant $A = B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les groupes A et B sont congruence-distributifs, mais $\operatorname{Con}(A \times B) \ncong \operatorname{Con} A \times \operatorname{Con} B$.

Définition 2.4.15. Une algèbre A est *sous-directement irréductible* si elle a une plus petite congruence non nulle (i.e différente de la congruence id). Cela revient à dire que l'ensemble sous-jacent de A n'est pas un singleton et l'identité de A est complètement inf-irréductible.

Si A est sous-directement irréductible, alors le *monolithe* de A la plus petite congruence non nulle de A.

Une algèbre A est *simple* si $\operatorname{Con} A$ est une chaîne à deux éléments. Cela revient à dire que l'ensemble sous-jacent de A n'est pas un singleton et que toute congruence de A est soit l'identité de A soit $A \times A$.

Notation 2.4.16. Soit $\mathcal{V}$ une variété d'algèbres, nous notons $\mathrm{SI}(\mathcal{V})$ la classe de toutes les algèbres sous-directement irréductibles de $\mathcal{V}$.

Exemple 2.4.17. Soit A une algèbre, soit $\theta \in \mathrm{M}(\operatorname{Con} A)$, alors A/θ est sous-directement irréductible de monolithe θ^*/θ.

La notion de groupe simple usuelle coïncide avec la notion d'algèbre simple, car les sous-groupes normaux correspondent aux congruences.

Proposition 2.4.18. *Soit L un treillis modulaire de longueur finie, si L est sous-directement irréductible, alors L est simple.*

Cela provient du résultat plus général suivant :

Proposition 2.4.19. *Soit L un treillis modulaire de longueur finie, alors* $\operatorname{Con} L$ *est booléen.*

Le treillis des congruences d'une algèbre est algébrique, dans un tel treillis les éléments complètement inf-irréductibles ont un rôle important. Le théorème suivant est prouvé dans [**10**, Theorem I.4.23].

Théorème 2.4.20. *Dans un treillis algébrique tout élément est la borne inférieure d'un ensemble d'éléments complètement inf-irréductibles.*

Ce théorème s'applique en particulier dans un treillis des congruences d'une algèbre. La congruence id est la borne inférieure d'un ensemble d'éléments complètement inf-irréductibles. Nous pouvons en déduire le Théorème de Birkhoff suivant.

Théorème 2.4.21 (Birkhoff). *Une algèbre A est un produit sous-direct de ses quotients sous-directement irréductibles, défini de la manière suivante :*

$$A \to \prod_{\theta \in \mathrm{M}(\mathrm{Con}\, A)} A/\theta$$

$$a \mapsto (a/\theta)_{\theta \in \mathrm{M}(\mathrm{Con}\, A)}$$

En conséquence pour toute variété $\mathcal{V}$ d'algèbres nous avons $\mathcal{V} = \mathbf{P_S}\mathrm{SI}(\mathcal{V})$.

2.5. Ultraproduits

Définition 2.5.1. Soit X un ensemble. Un *filtre sur* X est un filtre de $\mathfrak{P}(X)$.
Un *ultrafiltre* sur X est un filtre propre maximal de $\mathfrak{P}(X)$.

En particulier $\mathfrak{P}(X) \uparrow \{x\} = \{Y \subseteq X \mid x \in Y\}$ est un ultrafiltre sur X, pour tout $x \in X$. Un tel ultrafiltre est appelé *ultrafiltre principal.*

Une *quasi-partition* d'un ensemble X est une famille $(Y_k)_{k\in K}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{k\in K} Y_k$ et $Y_k \cap Y_l = \emptyset$ pour tout $k \neq l$ dans K (nous ne demandons pas que les Y_ks soient non vides). La quasi-partition est *finie* si K est fini.

Proposition 2.5.2. *Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble X. Soit $(Y_k)_{k\in K}$ une quasi-partition finie de X, alors il existe $k \in K$ tel que $Y_k \in \mathfrak{U}$.*

La proposition suivante permet de construire des ultrafiltres non principaux. Cependant pour la prouver il faut utiliser le Lemme de Zorn.

Proposition 2.5.3. *Tout filtre propre est inclus dans un ultrafiltre.*

Démonstration. Soit F un filtre propre sur un ensemble X, soit C une chaîne de filtres propres contenant F, alors $\bigcup C$ est un filtre propre contenant F. Le lemme de Zorn implique qlors qu'il existe des éléments maximaux dans l'ensemble des filtres propres contenant F. □

Par exemple, fixons un ensemble infini X, posons $F = \{Y \subseteq X \mid X - Y \text{ est fini}\}$, l'ensemble des parties de X dont le complémentaire est fini. Il est facile de voir que F est un filtre propre. Il existe donc un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ contenant F. Supposons que $\mathfrak{U}$ soit principal. Soit $x \in X$ tel que $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}(X) \uparrow \{x\}$, en particulier $\{x\} \in \mathfrak{U}$, mais $X - \{x\} \in F \subseteq \mathfrak{U}$, donc $\emptyset = \{x\} \cap (X - \{x\}) \in \mathfrak{U}$. En conséquence $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}(X)$ n'est pas propre ; contradiction. Cela nous permet donc de construire un ultrafiltre non principal.

La donnée d'un filtre sur un ensemble X permet de construire une congruence d'un produit d'algèbres sur X.

Proposition 2.5.4. *Soit $(A_x)_{x\in X}$ une famille d'algèbres de même type de similarité et soit F un filtre sur X. Posons $A = \prod_{x\in X} A_x$, considérons la relation définie de la manière suivante :*

$$\Theta_F = \Big\{(a, b) \in A^2 \mid \{x \in X \mid a_x = b_x\} \in F\Big\}$$

alors Θ_F *est une congruence de* A*.*

La notation Θ_F sera utilisée dans la suite de cette section, sans préciser la famille d'algèbres.

DÉFINITION 2.5.5. *Un ultraproduit* des $(A_x)_{x\in X}$ est un quotient $(\prod_{x\in X} A_x)/\Theta_F$, où F est un ultrafiltre sur X.

Soit $\mathcal{K}$ une classe d'algèbres de même type de similarité, nous notons $\mathbf{P_U}\mathcal{K}$ la classe de tous les ultraproduits de toutes les familles d'algèbres de $\mathcal{K}$.

Les ultraproduits satisfont les même formules du premier ordre que leurs facteurs.

THÉORÈME 2.5.6 (Łoš). *Soit* $\mathfrak{U}$ *un ultrafiltre sur* X*, soit* $(A_x)_{x\in X}$ *une famille d'algèbres de même type de similarité, soit* ψ *une formule du premier ordre sans variables libres. Alors* $\prod_{x\in X} A_x/\Theta_{\mathfrak{U}}$ *satisfait* ψ *si et seulement si* $\{x \in X \mid A_x \text{ satisfait } \psi\}$ *appartient à* $\mathfrak{U}$*.*

En particulier un ultraproduit d'un nombre fini d'algèbres finies est l'une de ces algèbres.

PROPOSITION 2.5.7 (Frayne, Morel et Scott). *Soit* $\mathcal{K}$ *une classe finie d'algèbres finies de même type de similarité. Alors* $\mathbf{P_U}\mathcal{K} = \mathcal{K}$*.*

Le lemme suivant est prouvé par Jónsson dans [**24**], voir aussi [**22**, Lemma 1.4]

LEMME 2.5.8 (Jónsson). *Soit* $(A_x)_{x\in X}$ *une famille d'algèbres. Posons* $A = \prod_{x\in X} A_x$*, soit* B *une sous-algèbre congruence-distributive de* A*, soit* θ *une congruence inf-irréductible de* B*. Alors il existe un ultrafiltre* $\mathfrak{U}$ *sur* X *tel que* $\Theta_{\mathfrak{U}} \restriction B \subseteq \theta$*.*

Ce lemme permet de trouver les treillis sous-directement irréductibles d'une variété congruence-distributive, à partir d'un ensemble de générateurs de cette variété.

PROPOSITION 2.5.9 (Jónsson [**24**]). *Soit* $\mathcal{K}$ *une classe d'algèbres telle que* $\mathbf{Var}\mathcal{K}$ *soit congruence-distributive. Alors :*

$$\mathrm{SI}(\mathbf{Var}\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HSP_U}\mathcal{K},$$
$$\mathbf{Var}\mathcal{K} = \mathbf{P_S HSP_U}\mathcal{K}.$$

En utilisant la Proposition 2.5.7, nous montrons qu'une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives n'a qu'un nombre fini de sous-variétés.

PROPOSITION 2.5.10 (Jónsson [**24**]). *Soit* $\mathcal{K}$ *une classe finie d'algèbres finies tel que* $\mathbf{Var}\mathcal{K}$ *soit congruence-distributive. Alors*

$$\mathrm{SI}(\mathbf{Var}\mathcal{K}) \subseteq \mathbf{HS}\mathcal{K},$$
$$\mathbf{Var}\mathcal{K} = \mathbf{P_S HS}\mathcal{K}.$$

La classe $\mathrm{SI}(\mathbf{Var}\mathcal{K})$ *n'a à isomorphisme près qu'un nombre fini de membres. La variété* $\mathbf{Var}\mathcal{K}$ *n'a qu'un nombre fini de sous-variétés.*

Ce qui nous donne de plus un moyen de trouver les algèbres sous-directement irréductibles, il suffit de tester toutes les algèbres quotients d'une sous-algèbre d'une algèbre de $\mathcal{K}$.

2.6. Groupes abéliens pré-ordonnés

DÉFINITION 2.6.1. Un monoïde commutatif A est *conique* si $x + y = 0$ implique $x = y = 0$, pour tous $x, y \in A$.

Un monoïde commutatif A est de *raffinement* si pour tous a_0, a_1, b_0 et b_1 dans A tels que $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$ il existe $c_{0,0}, c_{0,1}, c_{1,0}, c_{1,1}$ tels que :

$$a_0 = c_{0,0} + c_{0,1}, \quad a_1 = c_{1,0} + c_{1,1}, \quad b_0 = c_{0,0} + c_{1,0} \quad \textit{et} \quad b_1 = c_{0,1} + c_{1,1}.$$

Par exemple $\mathbb{N}^n$ est un monoïde de raffinement conique.

DÉFINITION 2.6.2. Soit A un monoïde commutatif. Le *pré-ordre algébrique* sur A est la relation définie, pour tous $x, y \in A$, par $x \leq y \iff (\exists z \in A)(x + z = y)$.

REMARQUE 2.6.3. Il est immédiat que $\leq$ est une relation de pré-ordre sur A. Ce n'est pas en général une relation d'ordre, si par exemple A est un groupe abélien, alors $x \leq y$ pour tous $x, y \in A$.

DÉFINITION 2.6.4. Un *cône* d'un groupe abélien G est un sous-monoïde du monoïde sous-jacent à G. Un cône C de G est *strict* si le seul élément x de G tel que x et $-x$ sont dans C est 0.

Par exemple $\mathbb{N}^n$ est un cône strict de $\mathbb{Z}^n$. On remarque que si C est un cône strict d'un monoïde G, alors C est conique.

DÉFINITION 2.6.5. Un *groupe abélien pré-ordonné* est un groupe abélien G muni d'une relation de pré-ordre $\leq$ compatible avec $+$ (i.e. telle que si $x \leq y$ et $x' \leq y'$ dans G, alors $x + x' \leq y + y'$).

Le *cône* ou *monoïde des éléments positifs* de G, noté G^+ est $\{x \in G \mid 0 \leq x\}$.

Soit G et H des groupes abéliens pré-ordonnés. Un *morphisme de groupes abéliens pré-ordonnés* est un morphisme de groupes $f\colon G \to H$ préservant le pré-ordre. Ce qui équivaut à $f(G^+) \subseteq H^+$.

Un *groupe abélien ordonné* est un groupe abélien pré-ordonné dans lequel la relation de pré-ordre est une relation d'ordre. Ceci équivaut à dire que le monoïde G^+ est conique.

REMARQUE 2.6.6. Si G est groupe abélien pré-ordonné, alors la restriction de l'ordre de G à G^+ est l'ordre algébrique sur G^+.

On peut considérer un groupe abélien pré-ordonné comme un couple (G, C) où G est un groupe abélien et C est un cône de G. La relation d'ordre est alors définie par $x \leq y$ dans G si $y - x \in C$.

DÉFINITION 2.6.7. Une *unité d'ordre* d'un groupe abélien pré-ordonné G est un élément $u \in G^+$ tel que pour tout $x \in G$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq nu$, où $nu = \underbrace{u + u + \cdots + u}_{n \text{ fois}}$.

REMARQUE 2.6.8. Si u est une unité d'ordre d'un groupe abélien pré-ordonné G, alors pour tout $x \in G$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-nu \leq x \leq nu$. Tout élément $x \in G$ s'écrit $x = nu - (nu - x)$, où nu et $nu - x$ sont des éléments positifs de G, donc G est engendré en tant que groupe par G^+.

Définition 2.6.9. La *catégorie des groupes abéliens pré-ordonnés avec unité d'ordre*, notée $\mathscr{P}$, est la catégorie dont les objets sont les couples (G, u) où G est un groupe abélien pré-ordonné et u est une unité d'ordre de G, une flèche $f\colon (G, u) \to (H, v)$ est un morphisme de groupes abéliens pré-ordonnés $f\colon G \to H$ tel que $f(u) = v$.

Notation 2.6.10. Le foncteur ∇ est le foncteur qui a un groupe abélien associe son plus grand quotient parmi ceux qui sont des demi-treillis. Ainsi $\nabla(M) = M/\asymp$ où $\asymp$ est définie par $x \asymp y \iff (\exists n \in \mathbb{N})(x \leq ny$ et $y \leq nx)$, pour tous $x, y \in M$.

Nous notons $\overline{\nabla}$ le foncteur qui à un groupe abélien pré-ordonné G associe $\nabla(G^+)$.

2.7. Anneaux réguliers

Les résultats de cette section sont tous connus, la plupart des résultats sont prouvés dans [**19**].

Définition 2.7.1. Un élément x d'un anneau R est *idempotent*, si $x^2 = x$. Un élément x d'un anneau unitaire R est *inversible* s'il existe $y \in R$ tel que $xy = yx = 1$, dans ce cas l'élément y est unique, c'est *l'inverse de* x, il est noté x^{-1}. Deux éléments x et y de R sont *orthogonaux* si $xy = yx = 0$. Une famille $x_1, \dots, x_n$ est *orthogonale* si x_i et x_j sont orthogonaux, pour tous $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Remarque 2.7.2. Un *corps* est un anneau dans lequel tout élément non nul a un inverse.

Définition 2.7.3. Une partie I d'un anneau R est un *idéal à droite* de R, si I est un sous-groupe de $(R, +, 0)$ et $xy \in I$ pour tout $(x, y) \in I \times R$. Un *idéal à droite* de R est un idéal à gauche de R^{op}. Un *idéal bilatère* de R est une partie de R qui est à la fois idéal à droite et un idéal à gauche, nous appelons parfois *idéal* de R un idéal bilatère de R. Nous notons $\operatorname{Id}(R)$ l'ensemble de tous les idéaux de R, c'est un treillis algébrique pour l'inclusion ; nous notons $\operatorname{Id_c} R$ l'ensemble de tous les éléments compacts de $\operatorname{Id} R$.

Si $x \in R$, alors $xR = \{x\lambda \mid \lambda \in R\}$ est un idéal à droite, appelé *idéal à droite principal.* Nous notons $\mathbb{L}(R) = \{xR \mid x \in R\}$ ordonné par inclusion.

Proposition 2.7.4. *Soit R un anneau, les applications suivantes sont des isomorphismes mutuellement réciproques de* $\operatorname{Con} R$ *dans* $\operatorname{Id} R$*.*

$$\begin{aligned} \operatorname{Id} R &\to \operatorname{Con} R \\ I &\mapsto \{(x, y) \in R^2 \mid x - y \in I\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Con} R &\to \operatorname{Id} R \\ \theta &\mapsto \{x \in R \mid (x, 0) \in \theta\}. \end{aligned}$$

Notation 2.7.5. Si I est un idéal d'un anneau R, nous notons R/I au lieu du quotient $R/\{(x, y) \in R^2 \mid x - y \in I\}$. Si $a \in R$, nous notons $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$, c'est la classe de a modulo la congruence définie par I.

Définition 2.7.6. Soit R un anneau (resp., un anneau unitaire), considérons le type de similarité $\mathscr{L}_R = \{+, -, 0\} \cup \{h_\lambda \mid \lambda \in R\}$, où $+$ est un symbole de loi binaire, 0 est un symbole de constante et h_λ est un symbole de loi unaire pour tout $\lambda \in R$. Un *R-module à droite* est une algèbre $(M, \mathscr{L}_R)$, telle que $(M, +, -, 0)$ est un groupe abélien et satisfait les identités suivantes :

$$h_\alpha(x + y) = h_\alpha(x) + h_\alpha(y)$$
$$h_\beta(h_\alpha(x)) = h_{\alpha\beta}(x)$$

Si R est un anneau unitaire, nous demandons de plus que $h_1(x) = x$ soit satisfaite.

Notation 2.7.7. Si R est un anneau, nous notons M_R pour indiquer que M est un R-module à droite. Nous notons aussi $x\lambda$ au lieu de $h_\lambda(x)$ pour tout $x \in M$ et tout $\lambda \in R$.

Un *sous-R-module* ou *sous-module* est une sous-algèbre d'un module. Un *morphisme de R-modules* est un morphisme d'algèbres entre R-modules. Si M est un module, nous notons $\operatorname{Sub} M$ le treillis de tous les sous-modules de M, c'est un treillis algébrique. Nous notons $\operatorname{Sub_c} M$ le $(\vee, 0)$-demi-treillis de tous les sous-modules finiment engendrés de M, ce sont les éléments compactes de $\operatorname{Sub} M$.

Si K est un corps, un *K-espace vectoriel* est un K-module à droite.

Théorème 2.7.8. *Soit G un groupe, alors $\operatorname{Con} G$ est arguésien. Soit R un anneau, alors $\operatorname{Con} R \cong \operatorname{Id} R$ est arguésien. Soit R un anneau et soit M un R-module à droite, alors $\operatorname{Sub} M \cong \operatorname{Con} M$ est arguésien.*

Exemple 2.7.9. Sur la Figure 2.2 nous avons le treillis $\operatorname{Sub} \mathbb{F}_2^3$, où $\mathbb{F}_2$ désigne le corps à deux éléments.

Soit R un anneau, alors R est muni d'une structure naturelle de R-module, il est noté R_R. Soit M un groupe abélien, alors M est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{Z}$-module, il est noté $M_\mathbb{Z}$.

Soit R un anneau, alors $\operatorname{Sub} R_R$ est l'ensemble de tous les idéaux à droite de R, en particulier $\mathbb{L}(R) \subseteq \operatorname{Sub} R_R$. Cependant $\mathbb{L}(R)$ n'est pas en général un treillis, comme le montre l'exemple suivant (communiqué à l'auteur par F. Wehrung).

Posons $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Considérons $N \colon R \to \mathbb{N}$ définie par $N(u + v\sqrt{-5}) = u^2 + 5v^2$, pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que N est multiplicative. Posons $a = 1 - \sqrt{-5}$ et $b = 1 + \sqrt{-5}$. Nous avons $6 = a \times b = 2 \times 3$, donc $2R$ et aR contiennent $6R$ et $2aR$. Supposons qu'il existe $x \in R$ avec $2R, aR \supseteq xR \supseteq 6R, 2aR$. Nous avons $x \in 6R$ et $x \in 2aR$, donc par la multiplicativité de la norme $N(x)$ divise $N(2a) = 24$ et $N(6) = 36$, de même $N(2) = 4$ et $N(a) = 6$ divisent $N(x)$. Il en découle, par un simple calcul de pgcd et ppcm, que $N(x) = 12$. Mais il est de plus facile de voir que $u^2 + 5v^2 = 12$ n'a pas de solutions entières ; contradiction. Les éléments $2R$ et aR ne peuvent donc pas avoir de sup dans $\mathbb{L}(R)$, ce dernier n'est donc pas un treillis.

Définition 2.7.10. Soit R un anneau et M est un R-module à droite, considérons $(\operatorname{End} M, +, -, \cdot, 0)$ où $\operatorname{End} M$ est l'ensemble des morphismes de M_R dans M_R, muni des

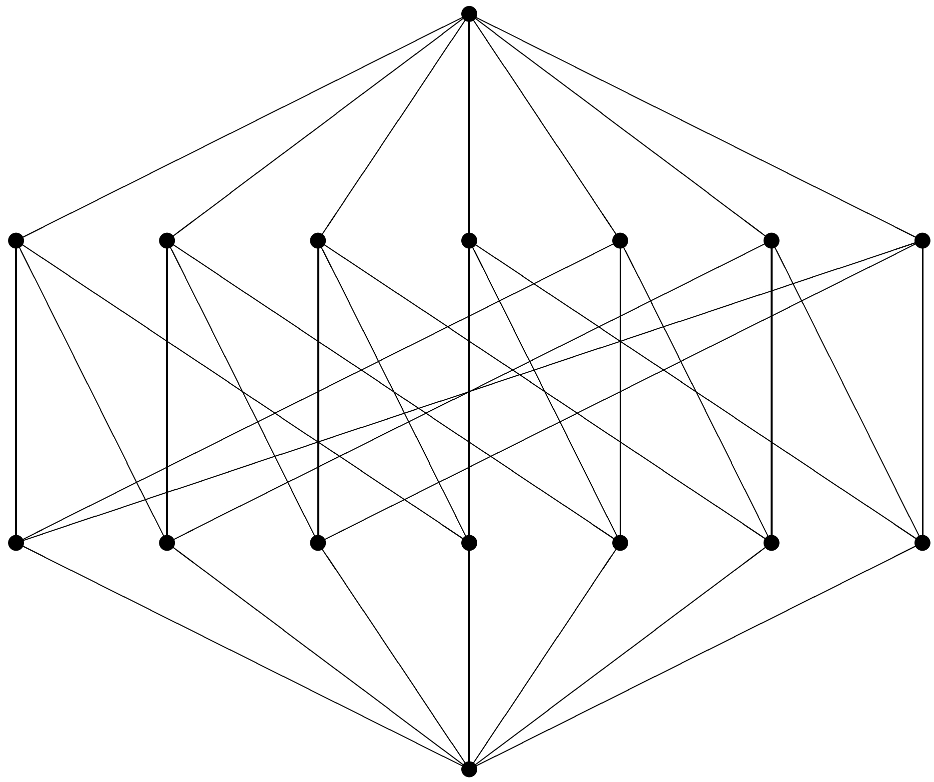

FIGURE 2.2. Le treillis $\operatorname{Sub} \mathbb{F}_2^3$.

opérations définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f+g\colon M &\to M \\ x &\mapsto f(x)+g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fg\colon M &\to M \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\colon M &\to M \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f\colon M &\to M \\ x &\mapsto -f(x) \end{aligned}$$

pour tous f, g dans $\operatorname{End} M$. Alors $\operatorname{End} M$ est un anneau unitaire appelé *anneau des endomorphismes de M*.

DÉFINITION 2.7.11. Soit R un anneau. Soit $x \in R$, un *quasi-inverse* de x est un élément $y \in R$ tel que $x = xyx$. L'anneau R est *régulier au sens de von Neumann* (nous dirons *régulier* dans le reste de cette thèse) si tout $x \in R$ a un quasi-inverse.

Supposons que R soit unitaire, alors R est *régulier par unités* si tout $x \in R$ a un quasi-inverse inversible.

Notons qu'un quasi-inverse n'est pas, en général, unique. Par exemple n'importe quel élément est un quasi-inverse de 0.

EXEMPLES 2.7.12. Tout corps est un anneau régulier (et même régulier par unités).

Notons $\mathrm{M}_n(F)$ la F-algèbre des matrices $n \times n$ de F, pour tout corps F et tout entier $n > 0$. Une *F-algèbre matricielle* est une F-algèbre isomorphe à $\mathrm{M}_{k_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{M}_{k_n}(F)$, pour des entiers naturels $k_1, \ldots, k_n$ strictement positifs. L'anneau correspondant est appelé *anneau matriciel*, il est régulier par unités (on dit alors que la F-algèbre correspondante est *régulière par unités*).

Une *F-algèbre localement matricielle* est une F-algèbre telle que toute partie finie est incluse dans une sous-algèbre matricielle. L'anneau correspondant est un anneau régulier appelé *anneau matriciel.* Il est régulier par unité si et seulement si il est unitaire.

La classe de tous les anneaux réguliers est stable par produits directs, quotients et limites inductives filtrantes croissantes.

LEMME 2.7.13. *Soient x, y, a des éléments d'un anneau R. Si a est un quasi-inverse de $x - xyx$, alors x a un quasi-inverse dans $a + I$, où I est l'idéal bilatère de R engendré par y.*

DÉMONSTRATION. Posons $x' = x - xyx$, alors :

$$\begin{aligned} x &= x' + xyx \\ &= x'ax' + xyx \\ &= (x - xyx)a(x - xyx) + xyx \\ &= xax - xaxyx - xyxax + xyxaxyx + xyx \end{aligned}$$

donc $x' = xbx$ où $b = a - axy - yxa + yxaxy + y$ appartient à $a + I$. $\square$

PROPOSITION 2.7.14 (cf. [**19**, Lemma 1.3]). *Soit I un idéal d'un anneau R. Alors R est régulier si et seulement si I et R/I sont réguliers.*

DÉMONSTRATION. Si R est régulier, alors il est facile de voir que R/I est aussi régulier. Soit $x \in I$, soit $y \in R$ un quasi-inverse de x, posons $y' = yxy$ dans I, alors $xy'x = xyxyx = xyx = x$, donc y' est un quasi-inverse de x dans I.

Réciproquement supposons que I et R/I soient réguliers. Soit $x \in R$. L'anneau R/I est régulier, donc il existe $y \in R$ tel que $x + I = xyx + I$, d'où $x - xyx \in I$. La régularité de I implique l'existence d'un quasi-inverse de $x - xyx$, en conséquence par le Lemme 2.7.13, x a un quasi-inverse. $\square$

PROPOSITION 2.7.15 (cf. [**19**, Proposition 1.4]). *Tout produit sous-direct d'une famille finie d'anneaux réguliers est un anneau régulier.*

Lemme 2.7.16. *Soit a et b des éléments idempotents d'un anneau régulier R, alors aRb est un sous-anneau de R, tout élément de aRb a un quasi-inverse dans bRa, a est neutre à gauche et b est neutre à droite (pour la multiplication). En particulier, aRa est un anneau régulier unitaire.*

Démonstration. Il est immédiat que aRb est un sous-anneau de R. Soit $x \in aRb$, alors il existe $t \in R$ tel que $x = atb$, nous avons $ax = aatb = atb = x$, donc a est neutre à gauche, de même b est neutre à droite. Soit $y \in R$ un quasi-inverse de x, nous avons $xbyax = xyx = x$, dons bya est un quasi-inverse de x, de plus bya est dans bRa. La deuxième partie du lemme découle immédiatement de la première. $\square$

Proposition 2.7.17 (cf. [**19**, Lemma 1.6]). *Soit n un entier naturel non nul, soit $e_1, \ldots, e_n$ une famille orthogonale d'éléments idempotents d'un anneau unitaire R, telles que $1 = e_1 + \cdots + e_n$. Alors R est régulier si et seulement si pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in e_iRe_j$, il existe $y \in e_jRe_i$ tel que $xyx = x$.*

Le théorème suivant est prouvé dans [**19**, Theorem 1.7].

Théorème 2.7.18. *Soir R un anneau régulier unitaire, soit P un R-module à droite projectif finiment engendré. Alors* $\operatorname{End} P$ *est un anneau régulier.*

Le lemme suivant est prouvé par Fryer et Halperin dans [**8**].

Lemme 2.7.19 (Fryer et Halperin). *Soit R un anneau, soient a, b dans R tel que a soit idempotent. Soit de plus u un quasi-inverse de $b - ab$. Alors les assertions suivantes sont satisfaites :*

(1) *Posons $c = (b - ab)u$. Alors $aR + bR = (a + c)R$.*
(2) *Supposons que b soit idempotent et posons $d = u(b-ab)$. Alors $aR \cap bR = (b-bd)R$.*
(3) *Supposons que b soit idempotent et $aR \subseteq bR$. Alors $bR = aR \oplus (b - ab)R$.*

Démonstration. (1) Comme $a^2 = a$, nous avons $ac = a(b-ab)u = (ab-a^2b)u = 0$, donc en utilisant le fait que u est un quasi-inverse de $b - ab$, nous obtenons $(a+c)c = c^2 = (b-ab)u(b-ab)u = (b-ab)u = c$, donc $a = a+c-c = a+c-(a+c)c$, en conséquence $aR \subseteq (a + c)R$. Nous avons $b - ab = (b - ab)u(b - ab) = c(b - ab)$, donc $b = ab+cb-cab = (a+c)b-(a+c)b$ et donc $bR \subseteq (a+c)R$. En conséquence $aR+bR \subseteq (a+c)R$. Réciproquement $a+c = a+(b-ab)u = a(a-bu)+bu \in aR+bR$, donc $(a + c)R \subseteq aR + bR$.

(2) Nous avons $b - ab = (b - ab)u(b - ab) = (b - ab)d$, donc $b - bd = ab - abd = a(b - bd) \in aR$. L'égalité $b^2 = b$ implique que $b - bd = b(b - d) \in bR$; par suite $(b - bd)R \subseteq aR \cap bR$. Réciproquement soit $x \in aR \cap bR$. Comme a et b sont idempotents, nous avons $x = ax = bx$, donc $dx = u(b - ab)x = u(x - x) = 0$, d'où $x = bx = (b - bd)x \in (b - bd)R$. Donc $aR \cap bR \subseteq (b - bd)R$.

(3) Nous avons $a = a^2 \in aR \subseteq bR$ et b est idempotent, donc $a = ba$. Soit $x \in aR \cap (b - ab)R$. Comme $a^2 = a$, nous avons $x = ax \in a(b - ab)R = \{0\}$; en conséquence $aR \cap (b - ab)R = \{0\}$. L'égalité $b = ab + (b - ab)$ est satisfaite, donc

$bR \subseteq aR + (b-ab)R$. Réciproquement de l'égalité $a = ba$ et de l'idempotence de b découle $b - ab = b^2 - bab = b(b-ab) \in bR$, donc $aR + (b-ab)R \subseteq bR$.

□

REMARQUE 2.7.20. Soit R un anneau. Soit $x \in R$, soit y un quasi-inverse de x, alors $x = xyx \in xR$. Posons $x' = xy$ alors x' est idempotent, car $x'x' = xyxy = xy = x'$, de plus $xR = x'R$, car $xR = xyxR \subseteq xyR \subseteq xR$. En particulier dans un anneau régulier, nous avons $x \in xR$, pour tout $x \in R$ et tout idéal principal est engendré par un élément idempotent. Le Lemme 2.7.19 montre que si R est un anneau régulier, alors tout idéal à droite finiment engendré est un idéal principal, donc $\operatorname{Sub_c} R_R = \mathbb{L}(R) = \{xR \mid x \text{ élément idempotent de } R\}$.

Une application directe du Lemme 2.7.19 montre ce qui suit :

COROLLAIRE 2.7.21. *Soit R un anneau régulier. L'ensemble ordonné $\mathbb{L}(R)$ est un sous-treillis sectionnellement complémenté de* $\operatorname{Sub} R_R$. *En particulier $\mathbb{L}(R)$ est Arguésien.*

Le résultat suivant est prouvé par Herrmann dans [**14**, Proposition 3].

COROLLAIRE 2.7.22 (Herrmann). *Soit R un anneau régulier. Soit M un module à droite d'un anneau S, soit $f\colon R \to \operatorname{End} M_S$ un morphisme d'anneaux. Alors il existe une unique application $\varphi\colon \mathbb{L}(R) \to \operatorname{Sub} M_S$ telle que $\varphi(xR) = \operatorname{im} f(x)$. Cette application φ est un morphisme de treillis préservant* 0. *Elle est injective si et seulement si f est injective.*

DÉMONSTRATION. Posons $\overline{S} = \operatorname{End} M_S$. Si $xR \subseteq yR$, alors, comme $x \in xR$, nous avons $x \in yR$, donc $f(x) \in f(y)\overline{S}$ et donc $\operatorname{im} f(x) \subseteq \operatorname{im} f(y)$. En conséquence l'application φ est bien définie, elle est de plus isotone et $\varphi(\{0\}) = \{0\}$.

Soient a, b idempotents dans R. Par le Lemme 2.7.19(1), il existe $z \in R$ tel que $aR + bR = zR$. Comme R est régulier, $z \in zR$, il existe donc x, y dans R tels que $z = ax + by$. D'où :

$$\varphi(aR + bR) = \varphi((ax+by)R) = \operatorname{im} f(ax+by) \subseteq \operatorname{im} f(a) + \operatorname{im} f(b) = \varphi(aR) + \varphi(bR).$$

Comme φ est isotone, l'inclusion réciproque est aussi vraie et donc $\varphi(aR + bR) = \varphi(aR) + \varphi(bR)$.

Soient $a, b \in R$ idempotents, soit u un quasi-inverse de $b - ab$, posons $d = u(b - ab)$, nous avons alors $aR \cap bR = (b - bd)R$ (cf. Lemme 2.7.19(2)). Soit $t \in \varphi(aR) \cap \varphi(bR)$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont idempotents, $t = f(a)(t) = f(b)(t)$, donc $f(d)(t) = 0$ et donc $t = f(b)(t) = f(b - bd)(t)$ appartient à $\operatorname{im} f(b - bd) = \varphi((b - bd)R) = \varphi(aR \cap bR)$. Donc $\varphi(aR) \cap \varphi(bR) \subseteq \varphi(aR \cap bR)$. Comme φ est isotone l'inclusion réciproque est aussi vraie. En conséquence φ est un morphisme de treillis préservant 0.

Comme $\mathbb{L}(R)$ est un treillis sectionnellement complémenté, φ est un isomorphisme si et seulement si φ sépare 0 (cf. Lemme 2.3.23). Soit $aR \in \mathbb{L}(R)$. Nous avons les équivalences suivantes $\varphi(aR) = \{0\} \iff \operatorname{im} f(a) = \{0\} \iff f(a) = 0 \iff a \in \ker f$. Donc φ est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$ ce qui est équivalent à f injective. □

COROLLAIRE 2.7.23. *Soit R et S des anneaux réguliers, soit $f\colon R \to S$ un morphisme d'anneaux. Il existe une unique application $\phi\colon \mathbb{L}(R) \to \mathbb{L}(S)$ telle que $\phi(xR) = f(x)S$ pour tout $x \in R$, de plus ϕ est un morphisme de treillis.*

Démonstration. Considérons le groupe abélien sous-jacent à S comme un $\mathbb{Z}$-module, noté $S_{\mathbb{Z}}$, et définissons $\overline{f}(x)$ comme la multiplication à gauche par x de S (c'est un endomorphisme de S) pour tout $x \in R$. Ainsi $\overline{f}$ est un morphisme d'anneaux de R dans $\operatorname{End} S_{\mathbb{Z}}$. En appliquant le Corollaire 2.7.22 à $\overline{f}$ nous obtenons une unique application $\varphi\colon \mathbb{L}(R) \to \operatorname{Sub} S_{\mathbb{Z}}$ telle que $\phi(xR) = f(x)S$ pour tout $x \in R$, l'application φ est de plus un morphisme de treillis préservant 0. Remarquons enfin que l'image de φ est incluse dans $\mathbb{L}(S)$. $\square$

Remarque 2.7.24. Nous noterons $\mathbb{L}(f)$ l'application définie dans le Corollaire 2.7.23. Nous avons $\mathbb{L}(\mathrm{id}_R) = \mathrm{id}_{\mathbb{L}(R)}$ pour tout anneau régulier R. Si R, S, T sont des anneaux réguliers et $f\colon R \to S$ et $g\colon S \to T$ sont des morphismes d'anneaux, alors $\mathbb{L}(g \circ f) = \mathbb{L}(g) \circ \mathbb{L}(f)$. En conséquence $\mathbb{L}$ est un foncteur de la catégorie des anneaux réguliers et morphisme d'anneaux dans la catégorie des treillis arguésien sectionnellement complémenté et morphisme de treillis préservant 0.

Proposition 2.7.25. *Soit F un corps, soit $R = \mathrm{M}_{k_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{M}_{k_n}(F)$, pour des entiers naturels $k_1, \dots, k_n > 0$, alors $\mathbb{L}(R) \cong \operatorname{Sub} F^{k_1} \times \operatorname{Sub} F^{k_2} \times \cdots \times \operatorname{Sub} F^{k_n}$.*

En particulier le treillis $\mathbb{L}(M_3(\mathbb{F}_2))$ est représenté sur la Figure 2.2.

Proposition 2.7.26. *Le foncteur $\mathbb{L}$ préserve les limites inductives filtrantes croissantes.*

Proposition 2.7.27. *Si R est un anneau régulier, alors $\mathbb{L}(R)$ est borné si et seulement si R est unitaire. Le plus grand élément est alors $R = 1R$.*

Si R et S sont des anneaux réguliers unitaires et $f\colon R \to S$ est un morphisme d'anneaux unitaires, alors $\mathbb{L}(f)$ préserve les bornes.

Démonstration. Si R est unitaire, alors $R = 1R \in \mathbb{L}(R)$ est le plus grand élément. Réciproquement soit eR le plus grand élément de $\mathbb{L}(R)$, nous pouvons supposer que e est idempotent. Soit $t \in R$, alors $tR \in \mathbb{L}(R)$, donc $t \in tR \subseteq eR$, en utilisant $e^2 = e$, nous obtenons $t = et$.

Soit $x \in R$, par ce qui précède nous avons $x = ex$. Soit y un quasi-inverse de $x - xe$. Par ce qui précède nous avons $y = ey$, donc :

$$x - xe = (x - xe)y(x - xe) = xyx - xyxe - xeyx + xeyxe = xyx - xyxe - xyx + xyxe = 0$$

donc $x = xe = ex$, donc R est unitaire.

Soient R et S des anneaux réguliers unitaires. Soit $f\colon R \to S$ un morphisme d'anneaux unitaires. Nous avons $\mathbb{L}(f)(1R) = f(1)S = 1S$, donc f préserve bien les bornes. Réciproquement supposons que $\mathbb{L}(f)$ préserve les bornes, alors $\mathbb{L}(f)(1R) = f(1)S$ est le plus grand élément de $\mathbb{L}(S)$, de plus $f(1)$ est idempotent, donc par un raisonnement similaire au précédent $f(1)$ est l'élément neutre de S (pour $\cdot$). $\square$

Proposition 2.7.28 (Jónsson dans [**23**, Lemma 10.2]). *Soit R un anneau régulier et e un élément idempotent de R. Alors eRe est régulier et la fonction $I \mapsto IR$, définit un isomorphisme de treillis de $\mathbb{L}(eRe)$ dans $\mathbb{L}(R) \downarrow eR$.*

Démonstration. Soit $x \in eRe$. Si y est un quasi-inverse de x dans R, alors $eyexeye = eyxye = exe = x$ donc eye est un quasi-inverse de x dans eRe. En conséqunce eRe est régulier.

Soit $t \in eRe$. Soit $I = teRe \in \mathbb{L}(R)$, alors $\phi(I) = IR = teReR \subseteq teR = tR$. Réciproquement $\phi(I) = IR = teReR = tReR \supseteq teR = tR$. Donc $\phi(I) = \phi(teRe) = tR$ est dans $\mathbb{L}(R) \downarrow eR$. En fait $\phi = \mathbb{L}(f)$, où $f\colon eRe \hookrightarrow R$ est l'inclusion canonique.

Soit $J \in \mathbb{L}(R) \downarrow eR$. Soit x idempotent dans R tel que $J = xR$. Comme $x \in xR \subseteq eR$ et e est idempotent, nous avons $ex = x$. Donc $xR = xxR = xrxR \subseteq xeR \subseteq xR$, donc $xeR = xR = J$. Posons $a = xe$, nous avons $a^2 = xexe = xxe = xe = a$ et $J = aR$, de plus $a = xe = exe \in eRe$, d'où $J = \phi(aRe)$. Ce qui montre que ϕ est surjective.

Soit a un élément idempotent de eRe, $\phi(aRe) \cap eRe = aR \cap eRe = aRe$; donc ϕ est un isomorphisme. □

Un treillis est *coordinatisable* s'il est isomorphe à $\mathbb{L}(R)$ pour un anneau régulier R. Une conséquence immédiate de la proposition 2.7.28 est que tout idéal principal d'un anneau coordinatisable est coordinatisable.

Le résultat suivant, prouvé par Faith et Utumi dans [**6**, Lemma 2], permet de réduire des problèmes sur les anneaux réguliers au cas unitaire.

Proposition 2.7.29 (Faith et Utumi). *Tout anneau régulier R est réunion filtrante croissante de tous ses sous-anneaux de la forme eRe pour e idempotent de R.*

Démonstration. Soit X une partie finie de R. Il découle du Corollaire 2.7.21 appliqué à R^{op} qu'il existe un idempotent f de R tel que $RX \subseteq Rf$. Il découle du Corollaire 2.7.21 appliqué à R qu'il existe g un idempotent de R tel que $XR + fR \subseteq gR$. Nous avons $f \in gR$ et g est idempotent donc $f = gf$. Posons $e = f + g - fg$, un calcul direct montre que e est idempotent. Comme $fe = f$ et $eg = g$, nous obtenons que $X \subseteq Rf = Rfe$, donc $X = Xe$, nous avons aussi $X \subseteq gR = egR$, donc $X = eX$. En conséquence $X \subseteq eRe$. □

Les équivalences suivantes, sur les isomorphismes d'idéaux (en tant que modules), sont bien connues

Lemme 2.7.30. *Soient a et b des éléments idempotents d'un anneau R. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *aR et bR sont isomorphes en tant que R-modules à droite.*

(*ii*) *Il existe des éléments mutuellement quasi-inverses x, y dans R tels que $a = yx$ et $b = xy$.*

(*iii*) *Il existe x, y dans R tels que $a = yx$ et $b = xy$.*

Démonstration. Montrons $(i) \implies (ii)$. Soit $f\colon aR \to bR$ un isomorphisme de R-modules à droite. L'élément $x = f(a)$ appartient à bR, et $x = f(aa) = f(a)a$ appartient à Ra, donc $x \in bRa$. Nous montrons de manière similaire que $y = f^{-1}(b)$ appartient à aRb. Les égalités suivantes sont vraies :

$$a = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(x) = f^{-1}(bx) = f^{-1}(b)x = yx,$$

de même $b = xy$. Par suite, en utilisant $x \in Ra$ et $y \in Rb$, nous obtenons $xyx = xa = x$ et $yxy = yb = y$.

L'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$ est triviale. Montrons $(iii) \Longrightarrow (i)$. Soit $t \in aR$. En observant que $xt = xat = xyxt = bxt$ appartient à bR, nous pouvons définir un homomorphisme de R-modules à droite $f\colon aR \to bR$, $t \mapsto xt$. Nous pouvons de même définir un morphisme de R-modules à droite $g\colon bR \to aR$, $t \mapsto yt$. Soit $t \in aR$, alors $g(f(t)) = yxt = at = t$, donc $g \circ f = \mathrm{id}_{aR}$, nous obtenons de manière similaire $f \circ g = \mathrm{id}_{bR}$, donc f et g sont mutuellement réciproques. $\square$

Remarque 2.7.31. Soient $x, y \in R$ tels que $a = yx$ et $b = xy$. Les éléments x et y sont mutuellement quasi-inverses si et seulement si à la fois $x \in bRa$ et $y \in aRb$.

Lemme 2.7.32. *Soit M un R-module à droite sur un anneau R et soient A et B des sous-modules de M_R. Si A et B sont perspectifs dans le treillis* $\operatorname{Sub} M_R$*, alors ils sont isomorphes. Si $A \cap B = \{0\}$, alors la réciproque est vraie.*

Démonstration. Si C est un sous-module de M_R tel que $A \oplus C = B \oplus C$, alors l'application $f\colon A \to B$ qui à $a \in A$ associe l'unique $b \in B$ tel que $a - b \in C$ est un isomorphisme. Réciproquement si $A \cap B = \{0\}$ et $f\colon A \to B$ est un isomorphisme, alors $A \oplus C = B \oplus C$, où $C = \{a - f(a) \mid a \in A\}$. $\square$

Le lemme suivant est prouvé par Wehrung dans [**39**, Lemma 4.1] dans le cas unitaire, mais le résultat est vrai dans le cas général.

Lemme 2.7.33 (Wehrung). *Soit I un idéal d'un anneau R. Soient a, b des idempotents de R tels que aR et bR sont isomorphes en tant que R-modules à droite. Alors $a \in I$ si et seulement si $b \in I$.*

Démonstration. Par le Lemme 2.7.30 il existe $x \in bRa$ et $y \in aRb$ tels que $a = yx$ et $b = xy$. Si $a \in I$, comme $y \in aRb$, nous avons $y \in I$, donc $b = xy \in I$. $\square$

Les deux lemmes suivants sont prouvés par Wehrung dans [**39**, Lemma 4.2 et Theorem 4.3] dans le cas unitaire, mais ils restent vrais dans le cas général.

Lemme 2.7.34 (Wehrung). *Soit R un anneau régulier et soit N un idéal de $\mathbb{L}(R)$. Alors N est neutre si et seulement si N est clos par isomorphisme (i.e. si $X \in N$ et $X \cong Y$, alors $Y \in N$).*

Démonstration. Supposons que N soit clos par isomorphisme. Soit $X \in N$, soit $Y \in \mathbb{L}(R)$ tel que $X \sim Y$. Les modules X_R et Y_R sont des sous-modules de R_R, la Proposition 2.3.25 implique qu'ils sont perspectifs dans $\operatorname{Sub} R_R = \mathbb{L}(R)$. Le Lemme 2.7.32 implique alors que X et Y sont isomorphes.

Supposons que N soit neutre. Soient $X, Y \in \mathbb{L}(R)$ tels que $X \cong Y$ et $Y \in N$. Il découle du Corollaire 2.7.21 qu'il existe $Y' \in \mathbb{L}(R)$ tel que $(X \cap Y) \oplus Y' = Y$. Comme $X \cap Y \subseteq X$ et $X \in N$, nous avons $X \cap Y \in N$. Comme $X \cong Y$ et Y' est un sous-module de Y, il existe X' un idéal à droite de R tel que $X' \subseteq X$ et $X' \cong Y'$. Nous avons $X' \cap Y' \subseteq X \cap Y \cap Y' = \{0\}$, donc $X' \cap Y' = \{0\}$, donc le Lemme 2.7.32 implique que X' et Y' sont perspectif dans

$\mathbb{L}(R)$. Nous avons $X' \subseteq X$, donc $X' \in N$, mais N est neutre, donc la Proposition 2.3.25 montre que $Y' \in N$, en conséquence $Y = (X \cap Y) \oplus Y'$ appartient à N. □

LEMME 2.7.35 (Wehrung). *Soit R un anneau régulier et N un idéal neutre de $\mathbb{L}(R)$. Alors $xR \in N$ implique que $yxR \in N$, pour tous $x, y \in R$.*

DÉMONSTRATION. Soit y' un quasi-inverse de y. Par la Proposition 2.7.29 il existe un élément idempotent e de R tel que $x, y \in eRe$, en particulier $xe = ex = x$, $ye = ey = y$ et $et = t$ pour tout $t \in xR$. Il découle du Corollaire 2.7.21 que $Y = xR \cap (e - y'y)R$ appartient à $\mathbb{L}(R)$. Comme $Y \subseteq xR$ et $\mathbb{L}(R)$ est sectionellement complémenté, il existe $Z \in \mathbb{L}(R)$ tel que $Y \oplus Z = xR$. Notons $f\colon xR \twoheadrightarrow yxR$ la multiplication à gauche par y. Soit $t \in \ker f$, alors $(e - y'y)t = et - y'yt = et - 0 = t$, donc $t \in Y$. Réciproquement, soit $t \in Y$. Il existe $t' \in R$ tel que $t = (e - y'y)t'$, donc $yt = y(e - y'y)t' = (ye - yy'y)t' = (y - y)t' = 0$, d'où $t \in \ker f$. En conséquence $\ker f = Y$. Donc f induit un isomorphisme de Z dans yxR. Comme $Z \subseteq xR$, $Z \in N$, donc, le Lemme 2.7.34 implique $yxR \in N$. □

Le théorème suivant est prouvé par Wehrung dans [**39**, Theorem 4.3] pour R unitaire, cependant le résultat reste vrai dans le cas général.

THÉORÈME 2.7.36 (Wehrung). *Soit R un anneau régulier. Alors nous pouvons définir des isomorphismes mutuellement réciproques de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \operatorname{NId}\mathbb{L}(R) &\to \operatorname{Id} R \\ N &\mapsto \{x \in R \mid xR \in N\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi\colon\ \operatorname{Id} R &\to \operatorname{NId}\mathbb{L}(R) \\ I &\mapsto \mathbb{L}(R) \downarrow I. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $N \in \operatorname{NId}\mathbb{L}(R)$. Soit $x \in \varphi(N)$, soit $y \in R$. Nous avons $xyR \subseteq xR$, donc $xyR \in N$ et donc $xy \in \varphi(N)$. Le Lemme 2.7.35 montre que $yxR \in N$ et donc $yx \in \varphi(N)$. En conséquence $\varphi(N)$ est bien un idéal de R. Soient x et y des éléments idempotents de R tels que $X = xR$ et $Y = yR$.

Soit I un idéal de R. Par construction $\psi(I)$ est un idéal de $\mathbb{L}(R)$. Soient $X, Y \in \psi(I)$ tels que $X \cong Y$. Comme $xR \subseteq I$, $x \in I$, donc par le Lemme 2.7.33 nous avons $y \in I$, d'où $Y \subseteq I$. En conséquence $\psi(I)$ est stable par isomorphisme, le Lemme 2.7.34 implique alors que $\psi(I)$ est un idéal neutre de $\mathbb{L}(R)$. Il est facile de vérifier que ψ et ϕ sont mutuellement réciproques. □

Le Corollaire 2.7.21 montre que $\mathbb{L}(R)$ est sectionellement complémenté pour tout anneau régulier R. Comme conséquence immédiate du Théorème 2.7.36 et de la Proposition 2.3.26 nous obtenons la proposition suivante, montrée par Wehrung dans [**39**, Corollary 4.4] dans le cas unitaire.

PROPOSITION 2.7.37 (Wehrung). *Pour tout anneau régulier R, $\operatorname{Con_c}\mathbb{L}(R)$ est isomorphe à $\operatorname{Id_c} R$.*

Nous allons maintenant introduire le foncteur K_0 qui associe à un anneau un groupe abélien pré-ordonné, pour plus de détails le lecteur peut consulter [**19**, Section 15].

Définition 2.7.38. Soit R un anneau, nous notons $\mathrm{FP}(R)$ la classe de tous les K-modules à droite projectifs finiment engendrés. Nous notons $V(R)$ le monoïde commutatif des classes d'isomorphismes des éléments de $\mathrm{FP}(R)$. Nous notons $[A]_{\mathrm{v}}$ la classe du module à droite projectif finiment engendré A dans $V(R)$. L'addition est définie par $[A]_{\mathrm{v}} + [B]_{\mathrm{v}} = [A \times B]_{\mathrm{v}}$. L'élément neutre est $[0]_{\mathrm{v}}$ où 0 désigne le R-module à gauche à un élément.

Remarque 2.7.39. Soit R un anneau. Le monoïde $V(R)$ est conique, si de plus R est régulier alors $V(R)$ est un monoïde de raffinement.

Définition 2.7.40. Soit R un anneau unitaire. Deux modules A et B de $\mathrm{FP}(R)$ sont *stablement isomorphes* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $A \times R^n_R \cong B \times R^n_R$. La relation «être stablement isomorphe» est une relation d'équivalence, soit S l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. Notons $[A]$ la classe de A dans S, pour tout $A \in \mathrm{FP}(R)$. Il est facile de vérifier que si A est stablement isomorphe à A' et B est stablement isomorphe à B', alors $A \times B$ est stablement isomorphe à $B \times B'$. Nous pouvons donc définir une addition sur S par $[A] + [B] = [A \times B]$. L'ensemble S est ainsi muni d'une structure de monoïde commutatif. Il est de plus facile de voir que S est simplifiable, i.e. si $[A] + [B] = [A] + [C]$ dans S, alors $[B] = [C]$. Le monoïde S se plonge donc dans le groupe abélien pré-ordonné universel de S, que nous notons $K_0(R)$, nous pouvons considérer que $S \subseteq K_0(R)$ et $K_0(R)^+ = S$. Les éléments de $K_0(R)$ sont de la forme $[A]-[B]$ pour A et B dans $\mathrm{FP}(R)$, avec $[A]-[B] = [C]-[D]$ si et seulement si $[A] + [D] = [B] + [C]$, pour tous $A, B, C, D \in \mathrm{FP}(R)$.

Remarque 2.7.41. Si R est un anneau unitaire régulier, alors $K_0(R)$ est engendré en tant que groupe par $\{[eR] \mid e \text{ élément idempotent de } R\}$. L'élément $[R] = [1R]$ est une unité d'ordre de $K_0(R)$.

Nous pouvons étendre K_0 en un foncteur de la catégorie des anneaux unitaires avec morphismes d'anneaux unitaires, dans la catégorie des groupes abéliens pré-ordonnés (voir [**19**, Section 15]). Si $\varphi\colon R \to S$ est un morphisme d'anneaux unitaires, alors $K_0(\varphi)(eR) = \varphi(e)S$ pour tout élément idempotent $e \in R$. En particulier $K_0(\varphi)([R]) = [S]$.

Nous pouvons donc définir le foncteur $(K_0(-), [-])$ de la catégorie des anneaux unitaires dans $\mathscr{P}$ la catégorie des groupes abéliens pré-ordonnés avec unité d'ordre.

Proposition 2.7.42. *Les foncteurs K_0 et $(K_0(-), [-])$ préservent les produits finis et les limites inductives filtrantes croissantes.*

Remarque 2.7.43. Si R est un anneau régulier par unités, alors $[A] = [B]$ si et seulement si $A \cong B$, pour tous $A, B \in \mathrm{FP}(R)$. En particulier $K_0(R)^+ = V(R)$.

La proposition suivante est une conséquence de [**19**, Corollary 2.23] ; voir aussi la preuve de [**39**, Proposition 4.6].

Proposition 2.7.44. *Nous avons l'isomorphisme naturel $\nabla \circ V \cong \mathrm{Con_c} \circ \mathbb{L}$.*

Nous appliquerons toujours ces résultats à des anneaux unitaires et réguliers R tels que $V(R)$ est simplifiable (i.e., R est régulier par unités), donc $K_0(R)^+ = V(R)$.

Le théorème suivant est prouvé dans [**19**, Theorem 15.23].

THÉORÈME 2.7.45. *Soit F un corps, soit R une F-algèbre matricielle et soit S une F-algèbre régulière par unités.*

(1) *Soit $f\colon (K_0(R), [R]) \to (K_0(S), [S])$ dans la catégorie $\mathscr{P}$, il existe un morphisme de F-algèbres unitaire $\phi\colon R \to S$ tel que $K_0(\phi) = f$.*
(2) *Si $\phi, \psi\colon R \to S$ sont deux morphismes de F-algèbres, alors $K_0(\phi) = K_0(\psi)$ si et seulement il existe un automorphisme intérieur θ de S tel que $\phi = \theta \circ \psi$.*

Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 2.7.46. *Soit F un corps, soit $\boldsymbol{u} = (u_k)_{1 \le k \le n}$ une famille d'entiers naturels non nuls, soit $R = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{u_k}(F)$. Alors $(K_0(R), [R]) \cong (\mathbb{Z}^n, \boldsymbol{u})$.*

2.8. Le monoïde de dimension d'un treillis

Le monoïde de dimension a été introduit par Wehrung dans [**38**], cela permet de construire le foncteur K_0^ℓ sur les treillis qui est un analogue du foncteur K_0 sur les anneaux.

DÉFINITION 2.8.1. Soit L un treillis. Le *monoïde de dimension* de L, noté $\operatorname{Dim} L$ est le monoïde commutatif défini par les générateurs $\Delta(a, b)$ et les relations suivantes :

(1) $\Delta(a, a) = 0$, pour tout $a \in L$.
(2) $\Delta(a, b) + \Delta(b, c) = 0$, pour tous $a \le b \le c$ dans L.
(3) $\Delta(a, a \vee b) = \Delta(a \wedge b, b)$, pour tous $a, b \in L$.

Lorsqu'il y a ambiguïté nous noterons $\Delta_L(a, b)$ au lieu de simplement $\Delta(a, b)$.

Si $f\colon K \to L$ est un morphisme de treillis, nous pouvons définir un morphisme de monoïdes $\operatorname{Dim} f$ défini sur les générateurs de $\operatorname{Dim} K$ par $(\operatorname{Dim} f)(\Delta(a, b)) = \Delta(f(a), f(b))$.

REMARQUE 2.8.2. Nous définissons ainsi un foncteur Dim de la catégorie des treillis avec morphismes de treillis dans la catégorie des monoïdes commutatifs avec morphismes de monoïdes.

NOTATION 2.8.3. Nous notons K_0^ℓ le foncteur qui à un treillis associe le groupe de Grothendieck (i.e. le groupe abélien pré-ordonné universel) de $\operatorname{Dim} L$. C'est un foncteur de la catégorie des treillis et morphismes de treillis dans la catégorie des groupes abéliens pré-ordonnés et morphismes de groupes abéliens pré-ordonnés.

REMARQUE 2.8.4. Si L est un treillis borné, de plus petit élément 0 et de plus grand élément 1, alors (l'image canonique dans $K_0^\ell(L)$ de) $\Delta(0, 1)$ est une unité d'ordre de $K_0^\ell(L)$. Si $f\colon K \to L$ est un morphisme de treillis bornés (i.e. le morphisme préserve les bornes), alors $K_0^\ell(f)$ préserve les unités d'ordre définies de cette manière.

Wehrung démontre dans [**38**, Corollary 2.3] que le foncteur Dim est un précurseur du foncteur $\mathrm{Con_c}$, en fait $\mathrm{Con_c}\, L$ est isomorphe au plus grand quotient demi-treillis de $\operatorname{Dim} L$.

PROPOSITION 2.8.5. *Nous avons l'équivalence naturelle $\nabla \circ \operatorname{Dim} \cong \mathrm{Con_c}$.*

Nous appliquerons toujours cette proposition à des treillis L tels que $\operatorname{Dim} L$ est simplifiable, donc $K_0^\ell(L)^+ \cong \operatorname{Dim} L$. Dans ce cas nous avons alors $\overline{\nabla} \circ \operatorname{Dim} \cong \operatorname{Con}_c$.

La proposition suivante est prouvée par Wehrung dans [**38**, Proposition 5.5].

PROPOSITION 2.8.6. *Soit L un treillis modulaire sans chaîne bornée infinie. Soit P l'ensemble de toutes les classes de projectivité des intervalles premiers de L. Notons $|a,b|_\xi$ le nombre d'occurrences d'un intervalle de ξ dans une chaîne maximale de l'intervalle $[a,b]$. Alors il existe un isomorphisme $\pi\colon \operatorname{Dim} L \to (\mathbb{Z}^+)^{(P)}$ tel que $\pi(\Delta(a,b)) = (|a,b|_\xi \mid \xi \in P)$ pour tous $a \leq b$ dans L.*

Cela permet de prouver le lemme suivant, qui donne une description explicite de $K_0^\ell(L)$ pour tout treillis modulaires L de longueur finie (dans ce cas l'ensemble P est fini).

LEMME 2.8.7. *Soit L un treillis modulaire de longueur finie, posons $X = \mathrm{M}(\operatorname{Con} L)$. Alors il existe un isomorphisme $\pi'\colon K_0^\ell(L) \to \mathbb{Z}^X$ tel que*

$$\pi'(\Delta(a,b)) = (\operatorname{lh}([a/\theta, b/\theta]) \mid \theta \in X), \quad \textit{pour tous } a \leq b \textit{ dans } L.$$

En particulier $(K_0^\ell(L), \Delta(0,1))$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}^X, (\operatorname{lh}(L/\theta))_{\theta \in X})$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $\xi \in P$ notons par θ_ξ la plus grande congruence de L qui n'écrase aucun intervalle premier dans ξ. Il découle de la modularité de L que l'application $\xi \mapsto \theta_\xi$ définit une bijection de P dans X. Tout intervalle premier n'étant pas dans ξ est écrasé par θ_ξ, pour tout $\xi \in P$. Soient $a \leq b$ dans L, soit $\xi \in P$. Soit $a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_n$ dans L tels que $a_0 = a$ et $a_n = b$. Soit $0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_s < n$ tous les entiers tels que $[a_{r_k}, a_{r_k+1}] \in \xi$ pour tout $1 \leq k \leq s$. Donc $|a,b|_\xi = s$. Posons $r_{s+1} = n$. Comme $[a_{r_k}, a_{r_k+1}] \in \xi$ et $[a_{r_k+t}, a_{r_k+t+1}] \notin \xi$ pour tout $1 \leq t \leq r_{k+1} - r_k - 1$, nous obtenons :

$$a_{r_k}/\theta_\xi \prec a_{r_k+1}/\theta_\xi = a_{r_k+2}/\theta_\xi = \cdots = a_{r_{k+1}}/\theta_\xi, \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq s.$$

En conséquence les relations suivantes sont satisfaites :

$$a/\theta_\xi = a_{r_1}/\theta_\xi \prec a_{r_2}/\theta_\xi \prec \cdots \prec a_{r_s}/\theta_\xi \prec a_{r_{s+1}}/\theta_\xi = b/\theta_\xi.$$

Donc $\operatorname{lh}([a/\theta_\xi, b/\theta_\xi]) = s = |a,b|_\xi$. Le lemme découle alors de la Proposition 2.8.6. $\square$

CHAPITRE 3

Relèvements de diagrammes et points critiques

Une grande partie des résultats de ce chapitre sont disponibles dans [**11**].

3.1. Une propriété à la Löwenheim-Skolem

Définition 3.1.1. Soit U un ensemble ordonné, soit J une petite catégorie, et soit $\vec{\kappa} = (\kappa_u)_{u \in U}$ une famille de cardinaux. Une classe $\mathcal{V}$ d'algèbres de même type de similarité est $(U, J, \vec{\kappa})$-*Löwenheim-Skolem*, si pour tout foncteur $\mathcal{A}\colon J \to \mathcal{V}$ et pour toute famille de congruences $(\alpha_u^j)_{u \in U}^{j \in \operatorname{Ob} J}$, avec $\alpha_u^j \in \operatorname{Con} \mathcal{A}(j)$ tels que :

$$\sum_{j \in \operatorname{Ob} J} \operatorname{card} \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_u^j) < \kappa_u, \quad \text{pour tout } u \in U,$$

il existe une famille $(B_u^j)_{u \in U}^{j \in \operatorname{Ob} J}$ d'algèbres telles que :

(1) L'algèbre B_u^j est une sous-algèbre de $\mathcal{A}(j)$ pour tout $u \in U$ et tout $j \in \operatorname{Ob} J$.

(2) L'algèbre B_u^j/α_u^j est dans $\mathcal{V}$ pour tout $u \in U$ et tout $j \in \operatorname{Ob} J$.

(3) L'inclusion $B_u^j \subseteq B_v^j$ est satisfaite pour tout $u \leq v$ dans U et tout $j \in \operatorname{Ob} J$.

(4) L'inclusion $\mathcal{A}(f)(B_u^j) \subseteq B_u^k$ est satisfaite pour tout $u \in U$ et tout morphisme $f\colon j \to k$ dans J.

(5) Le morphisme $\operatorname{Con}(q_u^j)$ est un isomorphisme, où $q_u^j\colon B_u^j/\alpha_u^j \hookrightarrow \mathcal{A}(j)/\alpha_u^j$ est l'injection canonique.

(6) L'inégalité $\sum_{j \in \operatorname{Ob} J} \operatorname{card} B_u^j < \kappa_u$ est vérifiée pour tout $u \in U$.

Le résultat suivant est démontré dans [**15**, Theorem 10.4].

Lemme 3.1.2. $\Theta_B(x, y) \leq \bigvee_{i<m} \Theta_B(x_i, y_i)$ *si et seulement si il existe un entier naturel non nul n, une liste $\vec{z}$ de paramètre de B, et des termes t_1, …, t_n tels que*

$$\begin{aligned} x &= t_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \\ y &= t_n(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \\ t_j(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) &= t_{j+1}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad (\textit{pour tout } j < n). \end{aligned}$$

Cela nous permet de déduire le lemme suivant qui montre qu'une sous-structure élémentaire d'une algèbre A a comme congruences les restrictions des congruences de A.

Lemme 3.1.3. *Soit A une sous-structure élémentaire d'une algèbre B, où le langage est enrichi d'une congruence β de B. Alors* $\operatorname{Con_c} q\colon \operatorname{Con_c}(A/\beta) \to \operatorname{Con_c}(B/\beta)$ *est injective, où $q\colon A/\beta \to B/\beta$ est l'injection canonique.*

Démonstration. Soient x, y, $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans A, tels que l'inégalité

$$\Theta_{B/\beta}(x/\beta, y/\beta) \leq \bigvee_{1\leq k\leq m} \Theta_{B/\beta}(x_k/\beta, y_k/\beta) \quad \text{soit satisfaite.}$$

Par le Lemme 3.1.2 il existe un entier naturel non nul n, une liste $\vec{z}$ de paramètres dans B et des termes t_1, …, t_n tels que

$$\begin{aligned} x &\equiv t_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \pmod{\beta}, \\ y &\equiv t_n(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \pmod{\beta}, \\ t_j(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) &\equiv t_{j+1}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \pmod{\beta}, \quad \text{(pour tout } j < n). \end{aligned}$$

Comme A est une sous-structure élémentaire de B, nous pouvons supposer que $\vec{z}$ est dans A, d'où $\Theta_{A/\beta}(x/\beta, y/\beta) \leq \bigvee_{1\leq k\leq m} \Theta_{A/\beta}(x_k/\beta, y_k/\beta)$. Donc $\operatorname{Con_c} q$ est injective. □

Définition 3.1.4. Soit κ un cardinal. Une algèbre est *localement* $< \kappa$ si toute sous-algèbre finiment engendrée est de cardinal $< \kappa$. On défini de manière analogue une algèbre localement $\leq \kappa$. Une algèbre est *localement finie* si elle est localement $< \aleph_0$.

Une variété est *localement* $< \kappa$ (resp., *localement* $\leq \kappa$) si tous ses membres sont localement $< \kappa$ (resp., localement $\leq \kappa$).

Remarque 3.1.5. Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité. Toute $\mathscr{L}$-algèbre est localement $\leq \operatorname{card} \mathscr{L}$. Soit κ un cardinal, soient $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$ des types de similarité, soit $(E, \mathscr{L}')$ une algèbre tell que $(E, \mathscr{L})$ soit localement $\leq \kappa$, alors $(E, \mathscr{L}')$ est localement $\leq \kappa + \operatorname{card}(\mathscr{L}' - \mathscr{L})$.

Soit κ un cardinal. Si E est une algèbre localement $\leq \kappa$, alors toute sous-algèbre de E engendrée par au plus κ éléments a au plus κ éléments.

Le lemme suivant se démontre de manière analogue au Théorème de Löwenheim-Skolem, en utilisant le Lemme 3.1.2, comme dans le Lemme 3.1.3, mais de manière récursive.

Lemme 3.1.6. *Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité. Soit E une $\mathscr{L}$-algèbre, soit $Q \subseteq E$. Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-types de similarité de $\mathscr{L}$. Soit κ un cardinal infini. Si $(E, \mathscr{L})$ est localement $\leq \kappa$, alors il existe une sous-algèbre $(F, \mathscr{L})$ de $(E, \mathscr{L})$ telle que :*

1. *L'inclusion $Q \subseteq F$ est satisfaite,*
2. *L'inégalité $\operatorname{card} F \leq \kappa + \operatorname{card} Q + \operatorname{card} I$ est vérifiée,*
3. *Le morphisme $\operatorname{Con_c} q_i \colon \operatorname{Con_c}(F, \mathscr{L}_i) \to \operatorname{Con_c}(E, \mathscr{L}_i)$ est injectif, où $q_i \colon (F, \mathscr{L}_i) \to (E, \mathscr{L}_i)$ est le morphisme d'inclusion, pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soit A_0 la sous-algèbre de $(E, \mathscr{L})$ engendrée par Q. Comme E est localement $\leq \kappa$, nous avons $\operatorname{card} A_0 \leq \kappa + \operatorname{card} Q$. Soit $n < \omega$. Supposons avoir construit des sous-algèbres $A_0 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ de $(E, \mathscr{L})$ de cardinal au plus $\kappa + \operatorname{card} Q + \operatorname{card} I$, telles que pour tous $0 \leq u < v \leq n$, pour tout $i \in I$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tous x, y, $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans A_u nous avons l'équivalence suivante

$$\Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x, y) \leq \bigvee_{1\leq k\leq m} \Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k) \iff \Theta_{(A_v,\mathscr{L}_i)}(x, y) \leq \bigvee_{1\leq k\leq m} \Theta_{(A_v,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k).$$

Soit $i \in I$. Soient x, y, $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans X_n, tels que l'inégalité

$$\Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x,y) \leq \bigvee_{1 \leq k \leq m} \Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k) \quad \text{soit satisfaite.} \tag{3.1.1}$$

Par le Lemme 3.1.2 il existe un entier naturel non nul r, une liste $\vec{z}$ de paramètres dans E et des termes t_1, …, t_r tels que

$$\begin{aligned} x &= t_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \\ y &= t_r(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \\ t_j(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) &= t_{j+1}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad (\text{pour tout } j < r). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Nous pouvons donc construire $X \subseteq E$ tel que $A_n \subseteq X$, $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} A_n + \operatorname{card} I + \kappa$ et pour tout $i \in I$ et tous x, y, $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans X_n satisfaisant (3.1.1), il existe un entier naturel non nul r, une liste $\vec{z}$ de paramètres dans X et des termes t_1, …, t_r satisfaisant (3.1.2). Soit A_{n+1} la sous-algèbre de $(E, \mathscr{L})$ engendrée par X. Comme $(E, \mathscr{L})$ est localement $\leq \kappa$, nous avons $\operatorname{card} A_{n+1} \leq \operatorname{card} X + \kappa \leq \operatorname{card} A_n + \operatorname{card} I + \kappa \leq \kappa + \operatorname{card} Q + \operatorname{card} I$. De plus, par construction, l'hypothèse de récurrence est vérifiée.

Il existe donc une suite $(A_n)_{n<\omega}$ de sous-algèbres de $(E, \mathscr{L})$ de cardinal au plus $\kappa + \operatorname{card} Q + \operatorname{card} I$ telles que pour tous $0 < u < v$, pour tout $i \in I$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tous x, y, $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans A_u nous avons l'équivalence suivante

$$\Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x,y) \leq \bigvee_{1 \leq k \leq m} \Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k) \iff \Theta_{(A_v,\mathscr{L}_i)}(x,y) \leq \bigvee_{1 \leq k \leq m} \Theta_{(A_v,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k).$$

Posons $F = \bigcup_{n<\omega} A_n$, nous avons $Q \subseteq A_0 \subseteq F$ et $\operatorname{card} F \leq \sum_{n<\omega} \operatorname{card} A_n \leq \kappa + \operatorname{card} Q + \operatorname{card} I$. Il est de plus facile de vérifier que pour tout $i \in I$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tous x, y, $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_m$ dans F nous avons l'équivalence suivante

$$\Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x,y) \leq \bigvee_{1 \leq k \leq m} \Theta_{(E,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k) \iff \Theta_{(F,\mathscr{L}_i)}(x,y) \leq \bigvee_{1 \leq k \leq m} \Theta_{(F,\mathscr{L}_i)}(x_k, y_k).$$

Il en découle que le morphisme $\operatorname{Con_c} q_i \colon \operatorname{Con_c}(F, \mathscr{L}_i) \to \operatorname{Con_c}(E, \mathscr{L}_i)$ est injectif. $\square$

LEMME 3.1.7. *Soit κ un cardinal infini. Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité, soit $\mathcal{V}$ une variété de $\mathscr{L}$-algèbres localement $\leq \kappa$, soit J une petite catégorie, soit $\mathcal{A} \colon J \to \mathcal{V}$ un foncteur, soit α_j une congruence de $\mathcal{A}(j)$ et soit Q_j une partie de $\mathcal{A}(j)$ pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$. Alors il existe une famille $(B_j)_{j \in \operatorname{Ob} J}$ d'algèbres telles que :*

(1) *L'algèbre B_j est une sous-algèbre de $\mathcal{A}(j)$ pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$.*

(2) *L'inclusion $\mathcal{A}(f)(B_j) \subseteq B_k$ est vérifiée pour toute flèche $f \colon j \to k$ de J.*

(3) *Le morphisme $\operatorname{Con}(q_j)$ est un isomorphisme, où $q_j \colon B_j/\alpha_j \to \mathcal{A}(j)/\alpha_j$ est l'injection canonique pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$.*

(4) *L'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\operatorname{card} B_j \leq \kappa + \operatorname{card} \operatorname{Mor}(J \restriction j) + \sum_{i \trianglelefteq j} \Big(\operatorname{card} \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(i)/\alpha_i) + \operatorname{card} Q_i \Big),$$

pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$, où $J \restriction j$ est la sous-catégorie pleine de J avec comme classe d'objets $\{i \in \operatorname{Ob} J \mid i \trianglelefteq j\}$.

(5) *L'inclusion* $Q_j \subseteq B_j$ *est satisfaite pour tout* $j \in \operatorname{Ob} J$.

Démonstration. Soit $(Q'_j)_{j\in \operatorname{Ob} J}$ une famille d'ensembles tels que :

(1) L'ensemble Q'_j est une partie de $\mathcal{A}(j)$.

(2) L'égalité $\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j) = \operatorname{Con_c}^{Q'_j/\alpha_j}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j)$ est satisfaite.

(3) L'inégalité $\operatorname{card} Q'_j \leq \aleph_0 + \operatorname{card}\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j) + \operatorname{card} Q_j$ est satisfaite.

(4) L'inclusion $Q_j \subseteq Q'_j$ est satisfaite.

pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$

Fixons une famille $(x_j)_{j\in\operatorname{Ob} J} \in \prod_{j\in J}\mathcal{A}(j)$. Soit I une partie finie de $\operatorname{Ob} J$, notons $\overline{I}$ la sous-catégorie pleine de J dont la classe d'objets est I. Posons $T_I = \bigsqcup_{j\in I}\mathcal{A}(j)$, où $\bigsqcup$ est la réunion disjointe. Posons $\mathscr{L}_I = \operatorname{Mor}\overline{I} \sqcup \bigcup_{j\in I}(\{j\}\times\mathscr{L})$. Nous allons faire de $\mathscr{L}_I$ un langage du premier ordre, (i.e., donner une arité à chaque élément de $\mathscr{L}_I$) et munir T_I d'une structure de modèle de $\mathscr{L}_I$. Pour toute opération n-aire $\ell \in \mathscr{L}$ et tout $j \in \operatorname{Ob} J$, nous posons que (j,ℓ) est un symbole de loi n-aire, et :

$$(j,\ell)^{T_I}(a_1,a_2,\dots,a_n) = \begin{cases} \ell^{\mathcal{A}(j)}(a_1,a_2,\dots,a_n) & \text{si } a_1,a_2,\dots,a_n \in \mathcal{A}(j),\\ x_j & \text{sinon,}\end{cases}$$

pour tous $a_1,a_2,\dots,a_n \in T_I$. Tout $f \in \operatorname{Mor}\overline{I}$ est un symbole de loi unaire, et pour $f\colon i\to j$ nous posons :

$$f^{T_I}(a) = \begin{cases} \mathcal{A}(f)(a) & \text{pour tout } a \in \mathcal{A}(i),\\ x_j & \text{pour tout } a \in T_I - \mathcal{A}(i).\end{cases}$$

Considérons $\mathscr{L}'_I = \bigcup_{j\in I}(\{j\}\times\mathscr{L}) \subseteq \mathscr{L}_I$. Montrons que $(T_I,\mathscr{L}'_I)$ est localement $\leq\kappa$. Soit X une partie finie de T_I. Posons $X_j = \{x_j\}\cup(X\cap\mathcal{A}(j))$ pour tout $j\in I$. Soit Y_j la sous-algèbre de $(\mathcal{A}(j),\mathscr{L})$ engendrée par X_j, pour tout $j \in I$. Comme $\mathcal{A}(j)$ est localement $\leq\kappa$ et X_j est fini, nous avons $\operatorname{card} Y_j \leq \kappa$, pour tout $j\in I$. Posons $Y = \bigsqcup_{j\in I} Y_j$, alors Y est une sous-algèbre de $(T_I,\mathscr{L}'_I)$ et $Y \supseteq X$. Il en découle que $(T_I,\mathscr{L}'_I)$ est localement $\leq \kappa + \operatorname{card} I$. Nous avons de plus $\mathscr{L}_I - \mathscr{L}'_I = \operatorname{Mor}\overline{I}$, donc $(T_I,\mathscr{L}_I)$ est localement $\leq \kappa + \operatorname{card}\operatorname{Mor}\overline{I}$.

Considérons les types de similarité $\mathscr{L}_j = \{j\}\times\mathscr{L}$, pour tout $j\in\operatorname{Ob} J$. Le type de similarité $\mathscr{L}_j$ est un sous-type de similarité de $\mathscr{L}_I$, pour tout $I \in [\operatorname{Ob} J]^{<\omega} - \{\emptyset\}$ et tout $j \in I$. Par induction sur $\operatorname{card} I$, en appliquant le Lemme 3.1.6, nous montrons qu'il existe une famille $(T'_I,\mathscr{L}_I)_{I\in[\operatorname{Ob} J]^{<\omega}-\{\emptyset\}}$ d'algèbres telles que :

(1) L'algèbre $(T'_I,\mathscr{L}_I)$ est une sous-algèbre de $(T_I,\mathscr{L}_I)$,

(2) le morphisme $\operatorname{Con_c} q^I_j\colon \operatorname{Con_c}(T'_I,\mathscr{L}_j) \to \operatorname{Con_c}(T_I,\mathscr{L}_j)$ est injectif, où nous notons $q^I_j\colon (T'_I,\mathscr{L}_j)\to(T_I,\mathscr{L}_j)$ le morphisme d'inclusion, pour tout $j\in I$.

(3) l'inclusion $\bigsqcup_{i\in I} Q'_i \subseteq T'_I$ est vérifiée,

(4) l'inclusion $T'_K \subseteq T'_I$ est vérifiée,

(5) l'inégalité $\operatorname{card} T'_I \leq \kappa + \sum_{i\in I}\operatorname{card} Q'_i + \operatorname{card}\operatorname{Mor}\overline{I}$ est vraie,

pour toutes parties finies non vides $K \subseteq I$ de $\operatorname{Ob} J$.

Soit I une partie finie non vide de $\operatorname{Ob} J$, soit $j \in I$. Posons $B_j^I = \mathcal{A}(j) \cap T_I'$. Considérons :

$$\begin{aligned} q_j^I &\colon (T_I', \mathscr{L}_j) \to (T_I, \mathscr{L}_j), \\ p_j^I &\colon (B_j^I, \mathscr{L}_j) \to (\mathcal{A}(j), \mathscr{L}_j), \\ s_j^I &\colon (B_j^I, \mathscr{L}_j) \to (T_I', \mathscr{L}_j), \\ t_j^I &\colon (\mathcal{A}(j), \mathscr{L}_j) \to (T_I, \mathscr{L}_j), \end{aligned}$$

les morphismes d'inclusion. Par construction $\operatorname{Con_c} q_j^I$ est injectif. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} (T_I', \mathscr{L}_j) \arrow[r, "q_j^I"] & (T_I, \mathscr{L}_j) \\ (B_j^I, \mathscr{L}_j) \arrow[u, "s_j^I"] \arrow[r, "p_j^I"'] & (\mathcal{A}(j), \mathscr{L}_j) \arrow[u, "t_j^I"'] \end{tikzcd}$$

Soit θ une congruence de $(B_j^I, \mathscr{L}_j)$, alors $\theta \cup \mathrm{id}_{T_I'}$ est une congruence de $(T_I', \mathscr{L}_j)$. Ce qui montre que $\operatorname{Con_c} s_j^I$ est injectif. En conséquence $\operatorname{Con_c} p_j^I$ est injectif. Les assertions suivantes sont satisfaites :

(1) Le morphisme $\operatorname{Con_c} p_j^I \colon (B_j^I, \mathscr{L}) \to (\mathcal{A}(j), \mathscr{L})$ est injectif, où nous désignons par $p_j^I \colon (B_j^I, \mathscr{L}) \to (\mathcal{A}(j), \mathscr{L})$ le morphisme d'inclusion.

(2) l'inclusion $Q_j' \subseteq B_j^I$ est satisfaite,

(3) l'inclusion $B_j^K \subseteq B_j^I$ est satisfaite,

(4) $\operatorname{card} B_j^I \leq \kappa + \sum_{i \in I} \operatorname{card} Q_i' + \operatorname{card} \operatorname{Mor} \overline{I}$,

(5) $\mathcal{A}(f)(B_i^I) \subseteq B_j^I$ pour tout $f \colon i \to j$ dans $\overline{I}$,

pour toutes parties finies non vides $K \subseteq I$ de $\operatorname{Ob} J$ et tout $j \in K$.

Posons $B_j = \bigcup_{I \in [\operatorname{Ob}(J \downarrow j)]^{<\omega} - \{\emptyset\}} B_j^I$, c'est une réunion filtrante croissante des algèbres B_j^I, pour $I \in [\operatorname{Ob}(J \downarrow j)]^{<\omega} - \{\emptyset\}$. Nous avons alors :

- Le morphisme $\operatorname{Con_c} p_j \colon \operatorname{Con_c}(B_j/\alpha_j) \to \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j)$ est une injection, où nous notons $p_j \colon B_j/\alpha_j \to \mathcal{A}(j)/\alpha_j$ l'injection canonique.
- Le morphisme $\operatorname{Con_c} q_j \colon \operatorname{Con_c}(B_j/\alpha_j) \to \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j)$ est un isomorphisme. En effet, l'inclusion $Q_j' \subseteq B_j$ est vérifiée. Donc $\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j) = \operatorname{Con_c}^{B_j/\alpha_j}(\mathcal{A}(j)/\alpha_j)$, ce qui montre que $\operatorname{Con_c} q_j$ est surjectif.

– Les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} B_j &\leq \sum_{I\in[\operatorname{Ob}(J\restriction j)]^{<\omega}-\{\emptyset\}} \Big(\kappa + \sum_{i\in I} \operatorname{card} Q'_i + \operatorname{card} \operatorname{Mor} \overline{I}\Big) \\
&\leq \kappa + \sum_{i\trianglelefteq j} \operatorname{card} Q'_i + \sum_{I\in[\operatorname{Ob}(J\restriction j)]^{<\omega}-\{\emptyset\}} \Big(\operatorname{card} \operatorname{Mor} \overline{I}\Big) \\
&\leq \kappa + \sum_{i\trianglelefteq j} \Big(\operatorname{card} Q_i + \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(i)/\alpha_i)\Big) + \operatorname{card} \operatorname{Mor}(J \restriction j)
\end{aligned}$$

– L'inclusion $\mathcal{A}(f)(B_i) \subseteq B_j$ est vraie, pour tout $f\colon i \to j$ dans J, pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$. □

LEMME 3.1.8. *Soit λ un cardinal infini. Soit $\mathscr{L}$ un type de similarité, soit $\mathcal{V}$ une variété de $\mathscr{L}$-algèbres localement $\leq \lambda$, soit U un ensemble ordonné, soit J une petite catégorie, soit $\vec{\kappa} = (\kappa_u)_{u\in U}$ une famille de cardinaux tels que :*

(1) *L'inégalité $\lambda + \operatorname{card} \operatorname{Mor} J < \kappa_u$ est satisfaite pour tout $u \in U$.*

(2) *pour toute famille $(\kappa_u^j)_{u\in U}^{j\in \operatorname{Ob} J}$ de cardinaux avec $\kappa_u^j < \kappa_u$ pour tout $u \in U$ et $j \in \operatorname{Ob} J$, l'inégalité $\sum_{v\leq u} \sum_{j\in \operatorname{Ob} J} \kappa_v^j < \kappa_u$ est satisfaite.*

Alors $\mathcal{V}$ est $(U, J, \vec{\kappa})$-Löwenheim-Skolem.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{A}\colon J \to \mathcal{V}$ un foncteur, fixons aussi $(\alpha_u^j)_{u\in U}^{j\in \operatorname{Ob} J}$ une famille de congruences telle que $\alpha_u^j \in \operatorname{Con} \mathcal{A}(j)$ pour tous $u \in U$ et $j \in \operatorname{Ob} J$, et que :

$$\sum_{j\in \operatorname{Ob} J} \operatorname{card} \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_u^j) < \kappa_u, \qquad \text{pour tout } u \in U.$$

Considérons le foncteur $\mathcal{A}'\colon J \times U \to \mathcal{V}$ défini par

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'\colon J \times U &\to \mathcal{V} \\
(j, u) &\mapsto \mathcal{A}(j) && \text{pour tout } (j, u) \in \operatorname{Ob}(J \times U), \\
(f\colon i \to j, u \leq v) &\mapsto \mathcal{A}(f) && \text{pour tout } (f\colon i \to j, u \leq v) \in \operatorname{Mor}(J \times U).
\end{aligned}$$

Comme α_u^j est une congruence de $\mathcal{A}'(j, u)$ pour tout $(j, u) \in \operatorname{Ob}(J\times U)$. Par le Lemme 3.1.7, il existe une famille $(B_u^j)_{(j,u)\in \operatorname{Ob}(J\times U)}$ d'algèbres telles que :

(1) L'algèbre B_u^j est une sous-algèbre de $\mathcal{A}'(j, u)$ pour tout $(j, u) \in \operatorname{Ob}(J \times U)$.

(2) L'inclusion $\mathcal{A}'(f, u \leq v)(B_u^j) \subseteq B_v^k$ est vraie pour toute flèche $(f\colon j \to k, u \leq v)$ de $J \times U$.

(3) Le morphisme $\operatorname{Con}(q_u^j)$ est un isomorphisme, où $q_u^j\colon B_u^j/\alpha_u^j \hookrightarrow \mathcal{A}'(j, u)/\alpha_u^j$ est l'injection canonique pour tout $(j, u) \in \operatorname{Ob}(J \times U)$.

(4) L'inégalité suivante est satisfaite, pour tout $(j, u) \in \operatorname{Ob}(J \times U)$:

$$\operatorname{card} B_u^j \leq \lambda + \operatorname{card} \operatorname{Mor} \Big((J \times U) \restriction (j, u)\Big) + \sum_{(i,v)\trianglelefteq(j,u) \text{ dans } J\times U} \Big(\operatorname{card} \operatorname{Con_c}(\mathcal{A}'(i, v)/\alpha_v^i)\Big).$$

Les assertions $(1)-(5)$ de la Définition 3.1.1 sont satisfaites. De plus :

$$\operatorname{card}\operatorname{Mor}\Big((J\times U)\restriction(j,u)\Big)\leq\aleph_0+\operatorname{card}\operatorname{Mor}J+\operatorname{card}(U\downarrow u)<\kappa_u,$$

pour tout $(j,u)\in\operatorname{Ob}(J\times U)$. Mais $\operatorname{card}\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}'(i,u)/\alpha_u^i)=\operatorname{card}\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(i)/\alpha_u^i)<\kappa_u$ donc les inégalités suivantes sont vraies :

$$\sum_{(i,v)\trianglelefteq(j,u)\text{ dans }J\times U}\Big(\operatorname{card}\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}'(i,v)/\alpha_v^i)\Big)\leq\sum_{v\leq u}\sum_{i\in\operatorname{Ob}J}\Big(\operatorname{card}\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(i)/\alpha_v^i)\Big)<\kappa_u.$$

Donc $\operatorname{card}B_u^j<\kappa_u$, pour tout $u\in U$ et tout $j\in\operatorname{Ob}J$. Donc, en utilisant les hypothèses du lemme, on vérifie l'inégalité suivante :

$$\sum_{j\in\operatorname{Ob}J}\operatorname{card}B_u^j<\kappa_u,\quad\text{pour tout }u\in U.\qquad\square$$

LEMME 3.1.9. *Soit S un $(\vee,0)$-demi-treillis fini. Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives. Alors, à isomorphisme près, il existe au plus un nombre fini d'algèbres $A\in\mathcal{V}$ telle que $\operatorname{Con_c}A\cong S$. Toutes ces algèbres sont finies.*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{V}$ est une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives, par la Proposition 2.5.10, il existe, à isomorphisme près, un nombre fini d'algèbres sous-directement irréductibles dans $\mathcal{V}$ et elles sont toutes finies. Soit $A\in\mathcal{V}$ telle que $\operatorname{Con_c}A\cong S$. Comme A se plonge dans un produit de sous-directement irréductibles $A\hookrightarrow\prod_{\theta\in\mathrm{M}(\operatorname{Con}A)}A/\theta$ (cf. Théorème 2.4.21) et $\mathrm{M}(\operatorname{Con}A)\cong\mathrm{M}(\operatorname{Id}S)$ est fini, l'algèbre A est finie et nous avons même une borne sur le cardinal de telles algèbres. $\square$

LEMME 3.1.10. *Soit $\mathcal{V}$ une variété congruence-distributive finiment engendrée (ou la classe des algèbres congruence n-permutable d'une variété congruence-distributives finiment engendrée), soit U un ensemble ordonné initialement fini, soit J un ensemble ordonné fini, posons $\kappa_u=\aleph_0$ pour tout $u\in U$. Alors $\mathcal{V}$ est $(U,J,\vec{\kappa})$-Löwenheim-Skolem.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{A}\colon J\to\mathcal{V}$ un foncteur, considérons $(\alpha_u^j)_{u\in U}^{j\in\operatorname{Ob}J}$ une famille de congruences, telle que $\alpha_u^j\in\operatorname{Con}(\mathcal{A}(j))$ et $\operatorname{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_u^j)$ soit fini pour tout $u\in U$ et tout $j\in J$.

Par le Lemme 3.1.9, $\mathcal{A}(j)/\alpha_u^j$ est fini pour tout $u\in U$ et tout $j\in J$. Soit Q_u^j une partie finie de $\mathcal{A}(j)$ telle que $\mathcal{A}(j)/\alpha_u^j=\{q/\alpha_u^j\mid q\in Q_u^j\}$ pour tout $j\in J$ et tout $u\in U$. Soit B_u^j la sous-algèbre de $\mathcal{A}(j)$ engendrée par $\bigcup\{\mathcal{A}(i,j)(Q_v^i)\mid v\leq u\text{ et }i\leq j\}$ pour tout $j\in J$ et tout $u\in U$. Comme $\mathcal{V}$ est finiment engendrée, tous les objets de $\mathcal{V}$ sont localement finis, et donc B_u^j est fini pour tout $j\in J$ et tout $u\in U$. De plus les assertions suivantes sont satisfaites :

(1) L'algèbre B_u^j est une sous-algèbre de $\mathcal{A}(j)$ pour tout $u\in U$ et $j\in\operatorname{Ob}J$.
(2) L'algèbre $B_u^j/\alpha_u^j=\mathcal{A}(j)/\alpha_u^j$ est dans $\mathcal{V}$ pour tout $u\in U$ et tout $j\in\operatorname{Ob}J$.
(3) L'inclusion $B_u^j\subseteq B_v^j$ est satisfaite pour tous $u\leq v$ dans U et $j\in\operatorname{Ob}J$.
(4) L'inclusion $\mathcal{A}(j,k)(B_u^j)\subseteq B_u^k$ est vraie pour tout $u\in U$ et tout $j\leq k$ dans J.
(5) Le plongement canonique $q_u^j\colon B_u^j/\alpha_u^j\to A^j/\alpha_u^j$ est un isomorphisme, donc $\operatorname{Con}(q_u^j)$ est un isomorphisme pour tout $u\in U$ et tout $j\in J$.

(6) L'inégalité $\sum_{j\in \mathrm{Ob}\, J} \operatorname{card} B_u^j < \aleph_0$ est vérifiée pour tout $u \in U$. □

3.2. Noyaux, ensembles ordonnés supportés et recouvrements normés

Définition 3.2.1. Une partie finie V d'un ensemble ordonné U est un *noyau*, si pour tout $u \in U$, il existe un plus grand élément $v \in V$ tel que $v \leq u$. Nous notons alors cet élément $V \cdot u$.

Un ensemble ordonné U est *supporté*, si chaque partie finie de U est incluse dans un noyau de U.

Nous notons $V \cdot \boldsymbol{u}$ le plus grand élément de $V \cap \boldsymbol{u}$, pour tout noyau V de U et tout idéal $\boldsymbol{u}$ de U. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la finitude du noyau.

Lemme 3.2.2. *Toute intersection d'un ensemble non vide de noyaux de U est un noyau de U.*

Démonstration. Comme les noyaux de U sont finis, une intersection de noyaux s'écrit comme une intersection finie. Il suffit donc de démontrer le lemme pour l'intersection de deux noyaux.

Soit V et W des noyaux de U. Soit $u_0 \in U$, nous construisons par induction $u_{2k+1} = V \cdot u_{2k}$ et $u_{2k+2} = W \cdot u_{2k+1}$, pour tout entier k. Par construction $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier n. La suite $(u_{2k+1})_{k\in\omega}$ de V est décroissante. Mais V est fini, la suite est donc constante à partir d'un certain rang. Il existe donc $k \in \omega$ tel que $u_{2k+3} = u_{2k+1}$. Posons $v = u_{2k+1}$. Par suite $u_{2k+3} \leq u_{2k+2} \leq u_{2k+1} = v = u_{2k+3}$, donc $v = u_{2k+3} = u_{2k+2} = u_{2k+1}$. Donc $v = V \cdot v = W \cdot v \in V \cap W$. Soit $w \in V \cap W \cap {\downarrow} u$. Alors $w \leq u_0$. Si $w \leq u_{2n+1}$, alors $w = W \cdot w \leq W \cdot u_{2n+1} = u_{2n+2}$. Si $w \leq u_{2n}$, alors $w = V \cdot w \leq V \cdot u_{2n} = u_{2n+1}$. Donc par induction nous obtenons $w \leq u_n$ pour tout $n \in \omega$. Par suite $w \leq u_{2k+1} = v$. Donc v est le plus grand élément de $V \cap W \cap {\downarrow} u$. □

Définition 3.2.3. Un *recouvrement normé* d'un ensemble ordonné I est un couple $(U, |\cdot|)$, où U est un ensemble ordonné supporté et $|\cdot|\colon U \to I$, $u \mapsto |u|$ est une application croissante.

Un *idéal aiguisé* de $(U, |\cdot|)$ est un idéal $\boldsymbol{u}$ de U tel que $\{|v| \mid v \in \boldsymbol{u}\}$ a un plus grand élément, nous notons alors $|\boldsymbol{u}|$ cet élément. Par exemple, pour tout $u \in U$, l'idéal principal $U \downarrow u$ est aiguisé ; nous identifierons souvent u et $U \downarrow u$. Notons $\mathrm{Id_s}(U, |\cdot|)$ l'ensemble de tous les idéaux aiguisés de $(U, |\cdot|)$, ordonné par inclusion.

Un idéal aiguisé $\boldsymbol{u}$ de $(U, |\cdot|)$ est *extrémal*, s'il n'existe pas d'idéaux aiguisés $\boldsymbol{v}$ avec $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{u}$ et $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$. Notons $\mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$ l'ensemble de tous les idéaux extrémaux de $(U, |\cdot|)$.

Le recouvrement normé est *étroit* si l'application $\mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) \downarrow \boldsymbol{u} \to I \downarrow |\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{v} \mapsto |\boldsymbol{v}|$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$.

Soit $\vec{\kappa} = (\kappa_i)_{i\in I}$ une famille de cardinaux. Nous disons que $(U, |\cdot|)$ est *$\vec{\kappa}$-compatible*, si pour toute application croissante $F\colon \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) \to \mathfrak{P}(U)$ telle que $\operatorname{card} F(\boldsymbol{u}) < \kappa_{|\boldsymbol{u}|}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)^=$, il existe une application croissante $\sigma\colon I \to \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$ telle que :

(1) L'égalité $|\sigma(i)| = i$ est satisfaite pour tout $i \in I$.

(2) L'inclusion $F(\sigma(i)) \cap \sigma(j) \subseteq \sigma(i)$ est satisfaite pour tous $i \leq j$ dans I.

Nous dirons 'κ-compatible' au lieu de $\vec{\kappa}$-compatible si $\kappa_i = \kappa$ pour tout $i \in I$.

On remarque que la condition (2) implique que $V \cdot \sigma(i) = V \cdot \sigma(j)$ pour tous $i \leq j$ dans I et tout noyau V de U inclus dans $F(\sigma(i))$.

Le lemme suivant donne des exemples d'ensembles ordonnés supportés.

LEMME 3.2.4. *Soit X un ensemble, soit $(A_x)_{x\in X}$ une famille d'ensembles, soit $E \subseteq [X]^{<\omega}$ tel que $E = [X]^{<\omega} \downarrow E$. Posons :*

$$U = \bigcup_{P\in E} \prod_{x\in P} A_x.$$

Nous considérons les éléments de U comme des fonctions (partielles) et «être plus grand» signifie «étendre». Alors U est un ensemble ordonné supporté initialement fini.

DÉMONSTRATION. Soit V une partie finie de U. Soit $D = \bigcup\{\operatorname{dom} u \mid u \in V\}$. Posons $F = \{P \in E \mid P \subseteq D\}$. Comme D est réunion fini d'ensemble fini il est fini, par suite F est aussi fini. Posons :

$$Y_x = \{u_x \mid u \in V \text{ et } x \in \operatorname{dom} u\}, \quad \text{pour tout } x \in D.$$

Posons :

$$W = \{u \in U \mid \operatorname{dom} u \in F \text{ et } (\forall x \in \operatorname{dom} u)(u_x \in Y_x)\}.$$

L'ensemble F et les ensembles Y_x pour $x \in D$ sont tous finis, donc W est fini.

Soit $u \in U$, posons $P = \{x \in \operatorname{dom} u \mid x \in D \text{ et } u_x \in Y_x\}$. Alors $P \subseteq D \cap \operatorname{dom} u$, donc $P \in E$, d'où $P \in F$, ainsi $u \restriction P \in W$. Soit $w \in W$ tel que $w \leq u$. Soit $x \in \operatorname{dom} w$, alors $x \in D$ et $u_x = w_x \in Y_x$, d'où $\operatorname{dom} w \subseteq P$, donc $w \leq u \restriction P$. En conséquence $u \restriction P$ est le plus grand élément de $W \downarrow u$. $\square$

Pour construire des recouvrements normés nous utiliserons généralement le lemme suivant.

LEMME 3.2.5. *Soit I un ensemble ordonné avec un plus petit élément, tel que si i, j ont un majorant dans I alors $i \vee j$ existe. Soit $J \subseteq I$ tel que tout élément de I soit une borne supérieure fini d'éléments de J. Posons $E = [J]^{<\omega} \downarrow \{J \downarrow i \mid i \in I\}$. Soit $(A_j)_{j\in J}$ une famille d'ensembles non vides. Posons :*

$$U = \bigcup_{P\in E} \prod_{x\in P} A_x.$$

Posons $|u| = \bigvee \operatorname{dom} u$ pour tout $u \in U$. On remarque que $\operatorname{dom} u$ peut être vide, dans ce cas $|u|$ est le plus petit élément de I. Alors $(U, |\cdot|)$ est un recouvrement normé étroit initialement fini de I. L'ensemble des idéaux extrémaux est le suivant :

$$\operatorname{Id_e}(U, |\cdot|) = \left\{ \{u \restriction P \mid P \text{ partie finie de } \operatorname{dom} u\} \mid u \in \bigcup_{i\in I} \prod_{j\in J\downarrow i} A_j \right\}$$

Si au moins un des A_x est infini alors $\operatorname{card} U = \sum_{j\in J} A_j$

Démonstration. Par construction $E = [X]^{<\omega} \downarrow E$, donc le Lemme 3.2.4 implique que U est supporté et initialement fini, donc $(U, |\cdot|)$ est un recouvrement normé initialement fini de I.

Soit $i \in I$, soit $u \in \prod_{j \in J \downarrow i} A_j$, posons :

$$\boldsymbol{u} = \{u \restriction P \mid P \text{ partie finie de } \operatorname{dom} u\}.$$

soit $v \in \boldsymbol{u}$, posons $P = \operatorname{dom} v$, ainsi $P = \operatorname{dom} v \subseteq \operatorname{dom} u = J \downarrow i$. Donc $P \in E$, par suite $v \in U$. Soit $w \in U$ tel que $w \leq v$, posons $Q = \operatorname{dom} w$. Comme $w \leq v$, nous avons $w = v \restriction Q = (u \restriction P) \restriction Q = u \restriction Q$ donc $w \in \boldsymbol{u}$.

Soient $v, w \in \boldsymbol{u}$, posons $P = \operatorname{dom} v \cup \operatorname{dom} w$, alors P est une partie finie de $J \downarrow i$ donc $u \restriction P \in \boldsymbol{u}$ et $v, w \leq u \restriction P$. Donc $\boldsymbol{u}$ est un idéal de U.

Soit $v \in \boldsymbol{u}$, alors $\operatorname{dom} v \subseteq J \downarrow i$, donc $|v| = \bigvee \operatorname{dom} v \leq i$. Soient $P \subseteq J$ tel que P soit fini et $\bigvee P = i$, ainsi $P \subseteq J \downarrow i = \operatorname{dom} u$, donc $u \restriction P \in \boldsymbol{u}$. Nous avons donc $|u \restriction P| = \bigvee P = i$, ce qui montre que $\boldsymbol{u}$ est un idéal aiguisé de $(U, |\cdot|)$ et $|\boldsymbol{u}| = i$.

Soit $\boldsymbol{v}$ un idéal aiguisé de $(U, |\cdot|)$ tel que $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| = i$ et $\boldsymbol{v} \supseteq \boldsymbol{u}$. Soit $v \in \boldsymbol{v}$. Posons $P = \downarrow v$, alors $\bigvee P \leq i$, donc $P \subseteq J \downarrow i$, d'où $u \restriction P \in \boldsymbol{u} \subseteq \boldsymbol{v}$. Comme $\boldsymbol{v}$ est un idéal il existe $w \in \boldsymbol{v}$ tel que $v, u \restriction P \leq w$. Cela implique $v = w \restriction P = u \restriction P$, en conséquence $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$. Donc $\boldsymbol{u}$ est un idéal extrémal de $(U, |\cdot|)$.

Montrons réciproquement que tout idéal extrémal de $(U, |\cdot|)$ est de cette forme. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)$. Posons $i = |\boldsymbol{u}|$. Soient $u, v \in \boldsymbol{u}$ soit $j \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$, il existe $w \in \boldsymbol{u}$ tel que $u, v \leq w$, donc $u(j) = w(j) = v(j)$. Nous pouvons donc construire $v \in \prod_{j \in J \downarrow i} A_j$ tel que $u = v \restriction \operatorname{dom} u$ pour tout $u \in \boldsymbol{u}$. Posons :

$$\boldsymbol{v} = \{v \restriction P \mid P \text{ partie finie de } \operatorname{dom} v\}.$$

ainsi $\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{u}$ et $|\boldsymbol{v}| = i = |\boldsymbol{u}|$, mais $\boldsymbol{v}$ est extrémal, donc $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

Montrons que le recouvrement normé est étroit. Pour simplifier les notations nous identifierons les idéaux extrémaux avec les éléments de $\bigcup_{i \in I} \prod_{j \in J \downarrow i} A_j$. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)$, soit $i = |\boldsymbol{u}|$, posons :

$$\begin{aligned} \sigma \colon I \downarrow i &\to \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|) \downarrow \boldsymbol{u} \\ k &\mapsto \boldsymbol{u} \restriction (J \downarrow k) \end{aligned}$$

Soit $k \in I \downarrow i$, alors $|\sigma(k)| = \bigvee (J \downarrow k) = k$. Soit $\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{u}$, posons $k = |\boldsymbol{v}|$, donc $\operatorname{dom} \boldsymbol{v} = J \downarrow k$, donc $\sigma(k) = \boldsymbol{u} \restriction (J \downarrow k) = \boldsymbol{v}$. Donc σ et $|\cdot|$ sont réciproques. Ce qui montre que $(U, |\cdot|)$ est un recouvrement normé étroit de I. □

Proposition 3.2.6. *Soit T un arbre bien fondé, soient $\vec{\kappa} = (\kappa_t)_{t \in T}$ et $(\kappa'_t)_{t \in T^-}$ des familles de cardinaux infinis telles que pour tout $t \in T^-$ les assertions suivantes soient vraies :*

(1) *Si t a un prédécesseur immédiat alors $\kappa'_t \geq \kappa_{t_*}$.*
(2) *Si t n'a pas de prédécesseur immédiat, alors pour toute famille $(\kappa''_s)_{s<t}$ de cardinaux tels que $\kappa''_s < \kappa_s$ pour tous $s < t$, l'inégalité $\sum_{s<t} \kappa''_s < \kappa'_t$ est satisfaite.*

Alors il existe $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé étroit $\vec{\kappa}$-compatible de T tel que $\operatorname{card} U = \sum_{t \in T^-} \kappa'_t$.

Démonstration. Soit $J = T^-$, soit $E = [J]^{<\omega} \downarrow \{J \downarrow t \mid t \in T\}$, alors E est l'ensemble des chaînes finies de T^-. Posons $\phi(t) = J \downarrow t$ pour tout $t \in T$. Posons :

$$U = \bigcup \left\{ \prod_{t \in C} \kappa'_t \mid C \in E \right\};$$

remarquons que la chaîne C peut être vide. Posons $|u| = \bigvee \operatorname{dom} u$ pour tout $u \in U$, $|\emptyset|$ est le plus petit élément de T. Par le Lemme 3.2.5, $(U, |\cdot|)$ est un recouvrement normé initialement fini étroit de T. L'ensemble $\{x \restriction P \mid P \text{ partie finie de } \phi(t)\}$ est un idéal extrémal de $(U, |\cdot|)$, pour tout $t \in T$ et tout $x \in \prod_{s \in \phi(t)} \kappa'_s$. Dans la suite nous identifions cet idéal avec x. Tous les idéaux extrémaux de $(U, |\cdot|)$ sont de cette forme. Nous avons de plus $\operatorname{card} U = \sum_{t \in T^-} \kappa_t$.

Soit $F\colon \operatorname{Id_e}(U, |\cdot|) \to \mathfrak{P}(U)$ une application croissante telle que $\operatorname{card} F(\boldsymbol{u}) < \kappa_{|\boldsymbol{u}|}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_e}(U, |\cdot|)^=$. Posons :

$$F_t(\boldsymbol{u}) = \{v_t \mid v \in F(\boldsymbol{u}) \text{ et } t \in \operatorname{dom} v\}, \quad \text{pour tout } t \in T^- \text{ et tout } \boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_e}(U, |\cdot|).$$

Soit S une partie de T^- tel que $S = T \downarrow S$ et soit $x \in \prod_{t \in S} \kappa'_t$ tel que $x_t \notin F_t(x \restriction \phi(s))$ pour tous $s < t$ dans S. Soit $t \in T^-$ tel que $t \notin S$ et $\phi(t) - \{t\} \subseteq S$. Si t a un prédécesseur immédiat, alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \bigcup_{s<t} F_t(x \restriction \phi(s)) &= \operatorname{card} F_t(x \restriction \phi(t_*)) && \text{car } F_t \text{ est croissante} \\ &< \kappa_{t_*} && \text{car } x \restriction \phi(t_*) \text{ n'est pas maximal dans } \operatorname{Id_e}(U, |\cdot|) \\ &\leq \kappa'_t \end{aligned}$$

Si t n'a pas de prédécesseur immédiat, alors $\operatorname{card} \bigcup_{s<t} F_t(x \restriction \phi(s)) \leq \sum_{s<t} \operatorname{card} F_t(x \restriction \phi(s)) < \kappa'_t$. Dans les deux cas, nous pouvons étendre x a $S \cup \{t\}$ en choisissant $x_t \notin F_t(x \restriction \phi(s))$ pour tous $s < t$ dans T.

Comme T est bien fondé, nous pouvons construire par induction $x \in \prod_{t \in T^-} \kappa'_t$ tel que $x_t \notin F_t(x \restriction \phi(s))$ pour tous $s < t$ dans T. L'application $\sigma\colon T \to \operatorname{Id_e}(U, |\cdot|)$, $t \mapsto x \restriction \phi(t)$ est croissante et $|\sigma(t)| = t$ pour tout $t \in T$.

Soit $s < t$ dans T. Soit $u \in F(x \restriction \phi(s)) \cap (x \restriction \phi(t))$ et soit $C = \operatorname{dom} u$. Alors $C \subseteq \phi(t)$ et $u = x \restriction C$. Soit $s < r \leq t$, par construction $x_r \notin F_r(x \restriction \phi(s))$, donc $r \notin C$. D'où $C \subseteq \phi(s)$, par suite $u = x \restriction C$ appartient à $x \restriction \phi(s)$. □

Corollaire 3.2.7. *Soit T un arbre bien fondé et soit κ un cardinal infini tel que* $\operatorname{card} T \leq \kappa$ *et* $\operatorname{card}(\downarrow t) < \operatorname{cf} \kappa$ *pour tout $t \in T$. Alors il existe $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé étroit κ-compatible de T tel que* $\operatorname{card} U = \kappa$.

Démonstration. Soit $\kappa_t = \kappa'_t = \kappa$ pour tout $t \in T$. Les hypothèses de la Proposition 3.2.6 sont satisfaites. □

3.3. Combinatoire des recouvrements normés

Comme l'illustre le lemme suivant, le problème d'existence d'un recouvrement normé κ-compatible d'un ensemble ordonné donné est de nature combinatoire.

LEMME 3.3.1. *Soit I un $(\vee, 0)$-demi-treillis initialement fini, soient κ et λ des cardinaux infinis, soit $J \subseteq I$. Supposons qu'il existe un recouvrement normé initialement fini étroit et λ-compatible de I de cardinal κ. Alors pour tout $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\lambda}$ il existe une injection $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I.$$

DÉMONSTRATION. Soit $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé initialement fini λ-compatible de I, tel que $\operatorname{card} U = \kappa$. Posons $X = [U]^{<\omega}$, alors $\operatorname{card} X = \kappa$, donc une application $[\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\lambda}$ correspond à une application $f\colon [X]^{<\omega} \to [X]^{<\lambda}$. Posons

$$\begin{aligned} F\colon \ \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) &\to [U]^{<\lambda} \\ \boldsymbol{u} &\mapsto \bigcup\bigcup\{f(s) \mid s \in [\mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) \downarrow \boldsymbol{u}]^{<\omega}\} \end{aligned}$$

La λ-compatibilité du recouvrement normé implique qu'il existe $\sigma\colon I \to \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$ isotone, telle que

(i) L'égalité $|\sigma(i)| = i$ est vraie pour tout $i \in I$.

(ii) L'inclusion $F(\sigma(i)) \cap \sigma(j) \subseteq \sigma(i)$ est satisfaite pour tous $i \leq j$ dans I.

Soient $i \leq j$ dans I. Soit $a \in f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j)$. Il existe $k \in J \downarrow j$ tel que $a = \sigma(k)$. Comme σ est isotone, $\sigma(t) \leq \sigma(\bigvee J \downarrow i) = \sigma(i)$ pour tout $t \in J \downarrow i$, donc :

$$\sigma(J \downarrow i) \subseteq \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) \downarrow \sigma(i),$$

d'où

$$\bigcup f(\sigma(J \downarrow i)) \subseteq F(\sigma(i)),$$

Mais $\sigma(k) = a \in f(\sigma(J \downarrow i))$, en conséquence $\sigma(k) \subseteq F(\sigma(i))$. Comme $k \leq j$, nous avons $\sigma(k) \subseteq \sigma(j)$, donc (ii) implique $\sigma(k) \subseteq F(\sigma(i)) \cap \sigma(j) \subseteq \sigma(i)$, donc $k \leq i$, ainsi $a = \sigma(k) \in \sigma(J \downarrow i)$. En conclusion $f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i)$. □

THÉORÈME 3.3.2. *Soit I un $(\vee, 0)$-demi-treillis initialement fini, soient κ et λ des cardinaux infinis, notons $J = \mathrm{J}(I)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles de I. considérons les assertions suivantes.*

(1) *Il existe un recouvrement normé initialement fini étroit λ-compatible de I de cardinal κ.*

(2) *Pour tout $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\lambda}$ il existe $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I.$$

Alors $(1) \Longrightarrow (2)$. *Réciproquement si* $\operatorname{card} I < \operatorname{cf} \lambda$ *alors* $(2) \Longrightarrow (1)$.

DÉMONSTRATION. Le Lemme 3.3.1 nous montre que $(1) \Longrightarrow (2)$.

Réciproquement, supposons (2) vraie et $\operatorname{card} I \leq \operatorname{cf} \lambda$. Comme I est un $(\vee, 0)$-demi-treillis initialement fini, tout élément de I est une borne supérieure finie d'éléments de J. Posons :

$$E = [J]^{<\omega} \downarrow \{J \downarrow i \mid i \in I\}.$$

Posons

$$U = \bigcup_{P \in E} \kappa^P.$$

Posons $|u| = \bigvee \operatorname{dom} u$ pour tout $u \in U$. Par le Lemme 3.2.5, $(U, |\cdot|)$ est un recouvrement normé étroit initialement fini de I. Cela permet aussi d'identifier $\mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$ avec $\bigcup_{i \in I} \kappa^{J \downarrow i}$. Tout élément maximal de $\mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$ correspond a un élément de $\kappa^{J\downarrow i}$ pour un élément maximal i de I.

Soit $F\colon \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) \to \mathfrak{P}U$ une application croissante telle que $\operatorname{card} F(\boldsymbol{u}) < \lambda$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$. Posons :

$$\begin{aligned} f\colon [\kappa]^{<\omega} &\to [\kappa]^{<\lambda} \\ Y &\mapsto \bigcup \left\{ \operatorname{im} v \mid u \in \bigcup_{i \in I^=} Y^{J\downarrow i} \text{ et } v \in F(u) \right\} \end{aligned}$$

Cette application est bien définie car $\operatorname{im} v$ est fini pour tout $v \in U$, l'ensemble $Y^{J\downarrow i}$ est fini pour tout $i \in I$, le cardinal $\operatorname{card} I < \operatorname{cf} \lambda$ et $\operatorname{card} F(u) < \lambda$ pour tout $i \in I^=$ et tout $u \in Y^{J\downarrow i} \subseteq \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)^=$.

Il existe donc $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \text{pour tous } i \leq j \text{ dans } I.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \nu\colon I &\to \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|) \\ i &\mapsto \sigma \restriction (J \downarrow i) \end{aligned}$$

Soit $i \in I$, nous avons $|\nu(i)| = |\sigma \restriction (J \downarrow i)| = \bigvee (J \downarrow i) = i$. Soient $i \leq j$ dans I. Si $i = j$ alors $F(\sigma(i)) \cap \sigma(j) \subseteq \sigma(i)$. Nous supposerons dans la suite $i \neq j$ et donc $i \notin I^=$. Soit $v \in F(\nu(i))$, tel que $v \leq \nu(j)$. Posons $P = \operatorname{dom} v$, nous avons $v = \nu(j) \restriction P = (\sigma \restriction (J \downarrow j)) \restriction P = \sigma \restriction P$.

Nous avons $\nu(i) \in (\sigma(J \downarrow i))^{J\downarrow i}$ et $v \in F(\nu(i))$, donc $\operatorname{im} v \subseteq f(\sigma(J \downarrow i))$, d'où $\sigma(P) \subseteq f(\sigma(J \downarrow i))$. De plus, $P \subseteq J \downarrow j$, donc :

$$\sigma(P) \subseteq f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i).$$

Mais σ est injective, donc $P \subseteq J \downarrow i$. Donc $v = \sigma \restriction P \leq \sigma \restriction (J \downarrow i) = \nu(i)$. Donc si on considère que $\nu(i)$ et $\nu(j)$ sont des idéaux nous avons $F(\sigma(i)) \cap \sigma(j) \subseteq \sigma(i)$. $\square$

L'existence des recouvrements normés des treillis booléens tronqués est donc liée a une propriété combinatoire.

Corollaire 3.3.3. *Soient κ, λ des cardinaux infinis, μ un cardinal et $n < \mu$ un entier naturel. Posons $I = [\mu]^{\leq n} \cup \{\mu\}$, posons $J = \mathrm{J}(I)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé initialement fini étroit λ-compatible de I tel que* $\operatorname{card} U = \kappa$.

(2) *Pour tout* $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\lambda}$ *il existe* $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ *telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I.$$

(3) *Pour tout* $f\colon [\kappa]^n \to [\kappa]^{<\lambda}$ *il existe* $X \in [\kappa]^\mu$ *tel que pour tout* $Y \in [X]^n$ *nous avons* $f(Y) \cap X \subseteq Y$*.*

Démonstration. Le Théorème 3.3.2 montre que les assertions (1) et (2) sont équivalentes.

Posons $J = \mathrm{J}(I) = \{\{m\} \mid m \in \mu\}$. Supposons (2) vraie, soit $f\colon [\kappa]^n \to [\kappa]^{<\lambda}$, considérons :

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon [\kappa]^{<\omega} &\to [\kappa]^{<\lambda} \\ X &\mapsto \bigcup\{f(Y) \mid Y \in [X]^n\} \end{aligned}$$

il existe donc $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :

$$\overline{f}(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \text{pour tous } i \leq j \text{ dans } I.$$

Posons $X = \sigma(J) = \{\sigma(\{m\}) \mid m \in \mu\}$. Comme σ est injective, nous avons $\operatorname{card} X = \mu$, donc $X \in [\kappa]^\mu$. Soit $Y \in [X]^n$, il existe $P \in [\mu]^n$ tel que :

$$Y = \{\sigma(\{m\}) \mid m \in P\}.$$

Ainsi $\sigma(J \downarrow P) = \{\sigma(t) \mid t \in J \downarrow P\} = \{\sigma(\{m\}) \mid m \in P\} = Y$. Comme $\operatorname{card} Y = n$, nous obtenons $\overline{f}(Y) = f(Y)$ et $X = \sigma(J) = \sigma(J \downarrow \mu)$, donc

$$f(Y) \cap X = \overline{f}(Y) \cap X = \overline{f}(\sigma(J \downarrow P)) \cap \sigma(J \downarrow \mu) \subseteq \sigma(J \downarrow P) = Y,$$

ce qui montre (2) $\Longrightarrow$ (3).

Supposons maintenant (3), soit $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\lambda}$ croissante, considérons $f \restriction [\kappa]^n$, il existe $X \in [\kappa]^\mu$ tel que pour tout $Y \in [X]^n$ nous avons $f(Y) \cap X \subseteq Y$.

Nous avons $\operatorname{card} J = \mu = \operatorname{card} X$, nous pouvons donc fixer une bijection $\sigma\colon J \rightarrowtail X$. Soient $P < Q$ dans I, soit $P' \in [\mu]^n$ tel que $P' \supseteq P$. Donc

$$f(\sigma(J \downarrow P)) \cap \sigma(J \downarrow Q) \subseteq f(\sigma(J \downarrow P')) \cap \sigma(J) \subseteq f(\sigma(J \downarrow P')) \cap X.$$

Posons $Y = \sigma(J \downarrow P')$, alors $Y \in [X]^n$, donc $f(Y) \cap X \subseteq Y$. Donc :

$$f(\sigma(J \downarrow P)) \cap \sigma(J \downarrow Q) \subseteq f(Y) \cap X \subseteq f(Y) = Y = \sigma(J \downarrow P').$$

Soit $m \in Q - P$, il existe $P' \in [\mu]^n$ tel que $P' \supseteq P$ et $m \notin P'$, ce qui montre que $\sigma(\{m\}) \notin f(\sigma(J \downarrow P)) \cap \sigma(J \downarrow Q)$. En conclusion $f(\sigma(J \downarrow P)) \cap \sigma(J \downarrow Q) \subseteq \sigma(J \downarrow P)$. □

La propriété combinatoire infinie suivante est prouvée par Máté dans [**20**], voir aussi [**5**, Theorem 46.2]. Cette propriété est aussi utilisé par Ploščica dans [**28**].

Proposition 3.3.4. *Soit* $n \geq 0$ *un entier, soit* α *un ordinal, soit* $\kappa \geq \aleph_{\alpha+2}$*, soit* $f\colon [\kappa]^3 \to [\kappa]^{<\aleph_\alpha}$*. Alors il existe* $X \in [\kappa]^n$ *tel que pour tout* $Y \in [X]^2$*,* $f(Y) \cap X \subseteq Y$*.*

Comme application immédiate du Corollaire 3.3.3 et de la Proposition 3.3.4 nous obtenons :

LEMME 3.3.5. *Soit $n \geq 3$ un entier. Posons $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$, et posons :*

$$I_n = \{P \in \mathfrak{P}(\underline{n}) \mid \textit{soit } \operatorname{card}(P) \leq 2, \textit{ soit } P = \underline{n}\}.$$

Soit α un ordinal. Alors il existe $(U, |\cdot|)$ un $\aleph_\alpha$-compatible recouvrement normé étroit initialement fini de I_n tel que $\operatorname{card} U = \aleph_{\alpha+2}$.

L'ensemble ordonné I_3 est le cube, I_4 est illustré sur la Figure 3.1.

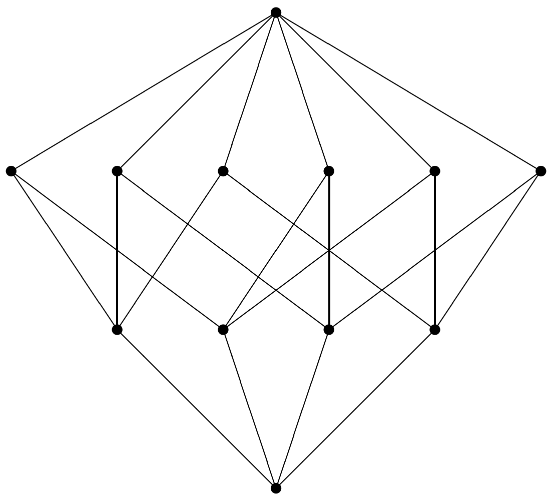

FIGURE 3.1. L'ensemble ordonné I_4.

REMARQUE 3.3.6. Dans la suite, si $f\colon [X]^{<\omega} \to \mathfrak{P}(Y)$ est croissante, nous notons alors $f(A) = \bigcup\{f(B) \mid B \in [A]^{<\omega}\}$ pour tout $A \subseteq X$.

LEMME 3.3.7. *Soient I et I' des ensembles ordonnés bien fondés tels que toute partie majorée a une borne supérieure. Notons 0 le plus petit élément de I et $0'$ le plus petit élément de I'. Posons $J = \mathrm{J}(I)$ et $J' = \mathrm{J}(I')$. Posons $I'' = I \times I'$, posons $J'' = \mathrm{J}(I \times I') = (J \times \{0'\}) \cup (\{0\} \times J')$. Soient $\mu \leq \gamma < \lambda \leq \kappa$ des cardinaux infinis tels que* $\operatorname{card} I < \operatorname{cf} \mu$. *Supposons que pour toute $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\lambda}$ croissante il existe $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I.$$

et que pour toute $f\colon [\gamma]^{<\omega} \to [\gamma]^{<\mu}$ croissante il existe $\sigma\colon J' \rightarrowtail \lambda$ telle que :

$$f(\sigma(J' \downarrow i)) \cap \sigma(J' \downarrow j) \subseteq \sigma(J' \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I'.$$

Alors pour toute $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\mu}$ croissante il existe $\sigma\colon J'' \rightarrowtail \kappa$ telle que :

$$f(\sigma(J'' \downarrow i)) \cap \sigma(J'' \downarrow j) \subseteq \sigma(J'' \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I''.$$

DÉMONSTRATION. Soit $F\colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\mu}$ croissante. Soit $Y \in [\kappa]^{<\omega}$, nous avons :

$$F(Y \cup \gamma) = \bigcup\{F(Y \cup Z) \mid Z \in [\gamma]^{<\omega}\}$$

donc

$$\operatorname{card} F(Y \cup \gamma) = \operatorname{card}\left(\bigcup\{F(Y \cup Z) \mid Z \in [\gamma]^{<\omega}\}\right) \leq \sum_{Z \in [\gamma]^{<\omega}} \mu = \gamma + \mu = \gamma < \lambda$$

Posons :

$$\begin{aligned} f\colon [\kappa]^{<\omega} &\to [\kappa]^{<\lambda} \\ Y &\mapsto F(Y \cup \gamma) = \bigcup\{F(Y \cup Z) \mid Z \in [\gamma]^{<\omega}\} \end{aligned}$$

Par les hypothèses du Lemme, il existe donc $\sigma\colon J \to \kappa$ telle que :

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \text{pour tous } i \leq j \text{ dans } I. \tag{3.3.1}$$

Nous avons :

$$F(Y \cup \sigma(J)) = \bigcup\{F(Y \cup \sigma(P)) \mid P \in [J]^{<\omega}\}, \quad \text{pour tout } Y \in [\gamma]^{<\omega}.$$

Nous avons $\operatorname{card}(F(X)) < \mu$ pour tout $X \in [\kappa]^{<\omega}$ et $\operatorname{card}([J]^{<\omega}) < \operatorname{cf} \mu$, donc :

$$\operatorname{card} F(Y \cup \sigma(J)) = \operatorname{card}(\bigcup\{F(Y \cup \sigma(P)) \mid P \in [J]^{<\omega}\}) < \mu, \quad \text{pour tout } Y \in [\gamma]^{<\omega}.$$

et $\operatorname{card} \sigma(J) < \operatorname{cf} \mu \leq \mu$. Nous pouvons donc poser :

$$\begin{aligned} f'\colon [\gamma]^{<\omega} &\to [\gamma]^{<\mu} \\ Y &\mapsto \gamma \cap \Big(\sigma(J) \cup F(Y \cup \sigma(J))\Big) \end{aligned}$$

il existe donc $\sigma'\colon J \rightarrowtail \gamma$ telle que :

$$f'(\sigma'(J' \downarrow i)) \cap \sigma'(J' \downarrow j) \subseteq \sigma'(J' \downarrow i), \quad \text{pour tous } i \leq j \text{ dans } I'. \tag{3.3.2}$$

Nous avons $J'' = \mathrm{J}(I \times I') = (J \times \{0'\}) \cup (\{0\} \times J')$, nous pouvons donc poser :

$$\begin{aligned} \sigma''\colon J'' &\to \kappa \\ t &\mapsto \begin{cases} \sigma(j) & \text{si } t = (j, 0'), \text{ avec } j \in J. \\ \sigma'(j') & \text{si } t = (0, j'), \text{ avec } j' \in J'. \end{cases} \end{aligned}$$

Les applications σ et σ' sont injectives. De plus, pour $j' \in J'$, l'équation (3.3.2) implique $f'(\sigma'(J' \downarrow 0')) \cap \sigma'(J' \downarrow j') \subseteq \sigma'(J' \downarrow 0')$. Nous avons de plus $J' \downarrow 0' = \emptyset$ et $f'(\emptyset) \supseteq \gamma \cap \sigma(J)$, donc :

$$\gamma \cap \sigma(J) \cap \sigma'(J' \downarrow j') \subseteq \emptyset$$

de plus $\sigma'(j') \in \gamma \cap \sigma'(J' \downarrow j')$, donc $\sigma'(j') \notin \sigma(J)$. Ce qui nous prouve l'injectivité de σ''.

Soient $(i, i') \leq (j, j')$ dans $I \times I'$. Nous avons :

$$\sigma''(J'' \downarrow (i, i')) = \sigma''((J \downarrow i \times \{0'\}) \cup (\{0'\} \times J' \downarrow i)) = \sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i')$$

de même

$$\sigma(J'' \downarrow (j, j')) = \sigma(J \downarrow j) \cup \sigma'(J' \downarrow j')$$

par suite :

$$\begin{aligned} &F\Big(\sigma''(J'' \downarrow (i,i'))\Big) \cap \sigma''(J'' \downarrow (j,j')) \\ &\quad = F\Big(\sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i')\Big) \cap \Big(\sigma(J \downarrow j) \cup \sigma'(J' \downarrow j')\Big) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Nous avons :

$$\gamma \cap F\Big(\sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i')\Big) \subseteq \gamma \cap (\sigma(J) \cup F\Big(\sigma(J) \cup \sigma'(J' \downarrow i')\Big) = f'(\sigma'(J' \downarrow i'))$$

de plus $\sigma'(J' \downarrow j') \subseteq \gamma$, avec (3.3.2) nous obtenons :

$$F\Big(\sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i')\Big) \cap \sigma'(J' \downarrow j') \subseteq f'(\sigma'(J' \downarrow i')) \cap \sigma'(J' \downarrow j') \subseteq \sigma'(J' \downarrow i') \tag{3.3.4}$$

Nous avons :

$$F\Big(\sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i')\Big) \subseteq F\Big(\sigma(J \downarrow i) \cup \gamma\Big) = f(\sigma(J \downarrow i)).$$

donc (3.3.1) implique :

$$F\Big(\sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i')\Big) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i). \tag{3.3.5}$$

Les équations (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) impliquent :

$$F\Big(\sigma''(J'' \downarrow (i,i'))\Big) \cap \sigma''(J'' \downarrow (j,j')) \subseteq \sigma(J \downarrow i) \cup \sigma'(J' \downarrow i') = \sigma(J'' \downarrow (i,i')) \qquad \square$$

LEMME 3.3.8. *Soit T un arbre, soit κ un cardinal tel que* $\operatorname{card} T < \kappa$ *et* $\operatorname{card} T \downarrow t < \operatorname{cf} \kappa$ *pour tout $t \in T$. Soit $J = \mathrm{J}(T)$, alors pour toute $f \colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\kappa}$ il existe $\sigma \colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } T.$$

DÉMONSTRATION. Notons $\perp$ le plus petit élément de T. Soit $f \colon [\kappa]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\kappa}$. Supposons que $T' \subseteq T^-$ tel que $T' = T^- \downarrow T'$. Supposons que nous ayons une application $\sigma \colon T' \rightarrowtail \kappa$ injective tel que :

$$f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \sigma(T^- \downarrow t) \subseteq \sigma(T^- \downarrow s), \quad \text{pour tous } s \leq t \text{ dans } T' \cup \{\perp\}.$$

Rappelons que nous notons $f(M) = \bigcup\{f(N) \mid N \in [M]^{<\omega}\}$, pour tout $M \subseteq \kappa$. Soit $t \in T^-$ tel que $t' \in T'$ pour tout $\perp < t' < t$. Posons :

$$A = \sigma(T') \cup f(\sigma((T^- \downarrow t) - \{t\})).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \operatorname{card} A &= \operatorname{card}(T') + \operatorname{card} f(\sigma((T^- \downarrow t) - \{t\})) \\ &\leq \operatorname{card}(T) + \sum \Big(\operatorname{card}(f(P)) \mid P \in [(T^- \downarrow t) - \{t\}]^{<\omega}\Big) \end{aligned}$$

Mais $\operatorname{card} T < \kappa$, $\operatorname{card}(f(P)) < \kappa$ pour tout $P \in [\kappa]^{<\omega}$ et $\operatorname{card}[(T^- \downarrow t) - \{t\}] = \operatorname{cf} \kappa$, donc $\operatorname{card} A < \kappa$. Nous pouvons donc choisir $x \in \kappa - A$. Étendons σ a $T' \cup \{t\}$, en posant

$\sigma(t) = x$. Comme $x \in \kappa - A \subseteq \kappa - \sigma(T')$, l'application $\sigma\colon T' \cup \{t\} \to \kappa$ est injective. Soit $s \leq t$.

$$\begin{aligned}
&f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \sigma(T^- \downarrow t)\\
&\quad = f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap (\{\sigma(t)\} \cup \bigcup_{s \leq t' < t} \sigma(T^- \downarrow t'))\\
&\quad = (f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \{\sigma(t)\}) \cup \bigcup_{s \leq t' < t} f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \sigma(T^- \downarrow t'))
\end{aligned}$$

mais par construction $\sigma(t) = x \notin f(\sigma(T^- \downarrow s))$ et par hypothèse $f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \sigma(T^- \downarrow t')) \subseteq \sigma(T^- \downarrow s)$ pour tout $t > t' \geq s$, nous avons donc :

$$f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \sigma(T^- \downarrow t) \subseteq \sigma(T^- \downarrow s)$$

Nous pouvons donc construire par induction une application injective $\sigma\colon T^- \to \kappa - \lambda$ telle que :

$$f(\sigma(T^- \downarrow s)) \cap \sigma(T^- \downarrow t) \subseteq \sigma(T^- \downarrow s), \quad \text{pour tous } s \leq t \text{ dans } T.$$

□

En raisonnant par induction et en utilisant le Lemme 3.3.7 et le Lemme 3.3.8, nous obtenons le lemme suivant qui généralise le Théorème des ensembles libres de Kuratowski.

LEMME 3.3.9. *Soit T un arbre fini, soit $n \in \mathbb{N}$ soit κ un cardinal infini, posons $I = T^{n+1}$, posons $J = \mathrm{J}(I)$, alors pour tout $f\colon [\kappa^{+n}]^{<\omega} \to [\kappa^{+n}]^{<\kappa}$ il existe $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I.$$

Le résultat suivant est conséquence immédiate du Lemme 3.3.9 et du Théorème 3.3.2

LEMME 3.3.10. *Soit T un arbre fini, soit $n \in \mathbb{N}$ soit κ un cardinal infini, il existe un recouvrement normé initialement fini étroit κ-compatible de T^{n+1} de cardinal κ^{+n}.*

COROLLAIRE 3.3.11. *Soit κ un cardinal infini, soit $n \in \mathbb{N}$, soit I un treillis fini de dimension d'ordre $n+1$, soit $J = \mathrm{J}(I)$, pour tout $f\colon [\kappa^{+n}]^{<\omega} \to [\kappa^{+n}]^{<\kappa}$ il existe $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa$ telle que :*

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \textit{pour tous } i \leq j \textit{ dans } I.$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble ordonné I est fini et de dimension d'ordre $n+1$, nous pouvons donc supposer que $I \subseteq C^{n+1}$ où C est une chaîne finie. Nous avons alors $J \subseteq I$. Par le Lemme 3.3.10 il existe $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé initialement fini étroit κ-compatible de T^{n+1} tel que $\operatorname{card} U = \kappa^{+n}$. Le Lemme 3.3.1 prouve donc que pour tout $f\colon [\kappa^{+n}]^{<\omega} \to [\kappa^{+n}]^{<\kappa}$ il existe $\sigma\colon J \rightarrowtail \kappa^{+n}$ telle que :

$$f(\sigma(J \downarrow i)) \cap \sigma(J \downarrow j) \subseteq \sigma(J \downarrow i), \quad \text{pour tous } i \leq j \text{ dans } C^{n+1}.$$

ce qui conclut la preuve car $I \subseteq C^{n+1}$. □

LEMME 3.3.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons :*

$$I = \{P \subseteq \{0, \dots, n+1\} \mid \operatorname{card} P \leq n \textit{ ou } \operatorname{card} P = n+2\}.$$

alors la dimension d'ordre de I est $n+1$.

Démonstration. Soit $C = \{0, 1, 2\}$ la chaîne à trois éléments. Soit $p \in \underline{n+1}$. Considérons $t^p \colon \underline{n+1} \to C$ définie par :

$$t^p(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k \neq p \end{cases}, \quad \text{pour tout } k \in \underline{n+1}.$$

considérons $t^{n+1} \colon \underline{n+1} \to C$ définie par $t^{n+1}(k) = 1$ pour tout $k \in \underline{n+1}$. Posons :

$$\begin{aligned} \mu \colon I &\to C^{n+1} \\ P &\mapsto \bigvee_{p \in P} t^p. \end{aligned}$$

Par construction, μ est une application croissante. Soit $P \in I$, nous avons alors :

$$\mu(P)(k) = \begin{cases} 2 & \text{si } k \in P \\ 0 & \text{si } n+1 \notin P \text{ et } k \notin P \\ 1 & \text{si } n+1 \in P \text{ et } k \notin P \end{cases}, \quad \text{pour tout } k \in \underline{n+1}.$$

Soient P, Q dans I tels que $\mu(P) \leq \mu(Q)$. Soit $p \in P$. supposons $p \leq n$, alors $\mu(Q)(p) = \mu(P)(p) = 2$, donc $p \in Q$. Supposons $p = n + 1$.

Si pour tout $q \in \underline{n+1}$ nous avons $\mu(Q)(q) = 2$, alors $\underline{n+1} \subseteq Q$, donc $\operatorname{card} Q \geq n + 1$, comme $Q \in I$ nous avons $Q = \underline{n+2}$, donc $p = n + 1 \in Q$.

Soit $q \in \underline{n+1}$ tel que $\mu(Q)(q) \neq 2$, donc $\mu(P)(q) \neq 2$, de plus $n + 1 \in P$, donc $\mu(P)(q) = 1$, d'où $\mu(Q)(q) = 1$. Nous avons donc $p = n + 1 \in Q$. En conséquence $P \subseteq Q$.

La dimension d'ordre de I est donc au plus $n + 1$, de plus 2^{n+1} se plonge dans I, donc la dimension d'ordre de I est $n + 1$. □

Le théorème suivant découle immédiatement du Lemme 3.3.12, du Corollaire 3.3.11 et du Corollaire 3.3.3.

Théorème 3.3.13. *Soit $n \in \mathbb{N}$, soit κ un cardinal infini, alors pour tout $f \colon [\kappa^{+n}]^n \to [\kappa^{+n}]^{<\kappa}$, il existe $X \in [\kappa^{+n}]^{n+2}$tel que pour tout $Y \in [X]^n$ nous avons $f(Y) \cap X \subseteq Y$.*

En particulier cela permet de répondre à la question posée par Erdös, Hajnal, Máté et Rado dans [**5**, Equation (2), Section 46, pp 285]. Pour tout $f \colon [\aleph_4]^4 \to [\aleph_4]^{<\omega}$ il existe $X \in [\aleph_4]^6$ tel que pour tout $Y \in [X]^4$, $f(Y) \cap X \subseteq Y$. Ou encore $(\aleph_4, 4, \aleph_0) \to 6$.

3.4. Condensats

Définition 3.4.1. Soit I un ensemble ordonné, soit $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé de I et soit $\vec{A} = (A_i, f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I}$ un diagramme d'algèbres de même type de similarité.

– Un *support* V de $a \in \prod_{u \in U} A_{|u|}$ est un noyau V de U tel que :

$$a_u = f_{|V \cdot u|, |u|}(a_{V \cdot u}), \quad \text{pour tout } u \in U.$$

– Posons :

$$\operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V) = \left\{ a \in \prod_{u \in U} A_{|u|} \mid V \text{ est un support de } a \right\}, \quad \text{pour tout noyau } V \text{ de } U.$$

Le *condensat* de $\vec{A}$ sur U est :

$$\operatorname{Cond}(\vec{A}, U) = \bigcup \Big\{ \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V) \mid V \text{ est un noyau de } U \Big\}.$$

– Notons $\operatorname{supp} a$ le plus petit support de a, aussi appelé *le support* de a.
Par le Lemme 3.2.2 le support de a existe pour tout $a \in \operatorname{Cond}(\vec{A}, U)$.

LEMME 3.4.2. *Avec les notations de la définition précédente les assertions suivantes sont satisfaites.*

(1) *L'ensemble* $\operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V)$ *est une sous-algèbre de* $\prod_{u \in U} A_{|u|}$ *pour tout noyau* V *de* U.

(2) *L'inclusion* $\operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V) \subseteq \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, W)$ *est vraie pour tous noyaux* V *et* W *de* U *tels que* $V \subseteq W$.

(3) *L'ensemble* $\operatorname{Cond}(\vec{A}, U)$ *est une sous-algèbre de* $\prod_{u \in U} A_{|u|}$, *de plus c'est la réunion filtrante croissante des* $\operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V)$, *avec* V *noyau de* U.

(4) *Le morphisme* $\pi_V \colon \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V) \to \prod_{v \in V} A_{|v|}$, $a \mapsto a \restriction V$ *est un isomorphisme pour tout noyau* V *de* U.

(5) *L'algèbre* $\operatorname{Cond}(\vec{A}, U)$ *est une réunion filtrante croissante de produits finis des* A_i*s.*

(6) *Le morphisme* $\pi_u \colon \operatorname{Cond}(\vec{A}, U) \to A_{|u|}$, $a \mapsto a_u$ *est surjectif pour tout* $u \in U$.

(7) *L'application :*

$$\begin{aligned} \pi_{\boldsymbol{u}} \colon \operatorname{Cond}(\vec{A}, U) &\to A_{|\boldsymbol{u}|} \\ a &\mapsto f_{|\operatorname{supp}(a)\cdot \boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{u}|}(a_{\operatorname{supp}(a)\cdot \boldsymbol{u}}) \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres, pour tout $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_s}(U, |\cdot|)$. *Soit de plus* V *un noyau de* U, *et* $a \in \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V)$, *alors* $\pi_{\boldsymbol{u}}(a) = f_{|V\cdot \boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{u}|}(a_{V\cdot \boldsymbol{u}})$.

DÉMONSTRATION. Les assertions (1), (2) et (3) sont évidentes. Le morphisme π_V dans (4) est clairement injectif. Soit $x \in \prod_{v \in V} A_{|v|}$, posons $a_u = f_{|V\cdot u|, |u|}(x_{V\cdot u})$ pour tout $u \in U$. Alors V est un support de a et $a \restriction V = x$. Donc π_V est bien un isomorphisme. L'assertion (5) est conséquence de (4) et (3). L'assertion (6) découle de (4).

Vérifions maintenant (7). Soit $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_s}(U, |\cdot|)$. Soit V un noyau de U et soit $a \in \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V)$, alors :

$$\begin{aligned} \pi_{\boldsymbol{u}}(a) &= f_{|\operatorname{supp}(a)\cdot \boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{u}|}(a_{\operatorname{supp}(a)\cdot \boldsymbol{u}}) \\ &= f_{|V\cdot \boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{u}|}(f_{|\operatorname{supp}(a)\cdot \boldsymbol{u}|, |V\cdot \boldsymbol{u}|}(a_{\operatorname{supp}(a)\cdot \boldsymbol{u}})) \\ &= f_{|V\cdot \boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{u}|}(a_{V\cdot \boldsymbol{u}}) \end{aligned}$$

Cela nous montre alors grâce à (3) que $\pi_{\boldsymbol{u}}$ est un morphisme d'algèbres. Soit $v \in \boldsymbol{u}$ tel que $|v| = |\boldsymbol{u}|$ et soit V un noyau de U tel que $v \in V$. Alors $|V \cdot \boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$ et $\pi_{\boldsymbol{u}} \restriction \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V) = f_{|V\cdot \boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{u}|} \circ \pi_{V\cdot \boldsymbol{u}} \restriction \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V) = \pi_{V\cdot \boldsymbol{u}} \restriction \operatorname{Cond}_U(\vec{A}, V)$ est surjective. □

Nous appelons l'application $\pi_{\boldsymbol{u}}$ définie ci-dessus *la projection canonique* de $\operatorname{Cond}(\vec{A}, \boldsymbol{u})$ à $A_{|\boldsymbol{u}|}$.

Exemple 3.4.3. Soit $I = \{0, 1\}$ la chaîne à deux éléments, considérons $U = \{\bot\} \sqcup \omega$ où $x < y$ si et seulement si $x = \bot$ et $y \in \omega$. Pour $u \in U$, nous posons $|u| = 0$ si $u = \bot$ et $|u| = 1$ si $u \in \omega$. Alors $(U, |\cdot|)$ est un recouvrement normé $\aleph_0$-compatible de I.

Un diagramme $\vec{A}$ indexé par I correspond à un morphisme $f\colon A_0 \to A_1$. Nous avons alors :

$$\mathrm{Cond}(\vec{A}, U) = \{(a_\bot, (a_n)_{n\in\omega}) \in A_0 \times A_1^\omega \mid \{n \in \omega \mid a_n \neq f(a_\bot)\} \text{ est fini}\}$$

Proposition 3.4.4. *Soit $\mathcal{V}$ une classe d'algèbres close par produit fini et par réunion filtrante croissante, soit I un ensemble ordonné, soit $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé de I, soit $\vec{A} = (A_i, f_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$ et $\vec{B} = (B_i, g_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$ deux objets de $\mathcal{V}^I$ et soit $\vec{h} = (h_i)_{i\in I}\colon \vec{A} \to \vec{B}$ une flèche de $\mathcal{V}^I$. Alors il existe des morphismes d'algèbres :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}_U(\vec{h}, V)\colon\ \mathrm{Cond}_U(\vec{A}, V) &\to \mathrm{Cond}_U(\vec{B}, V)\\ (a_u)_{u\in U} &\mapsto (h_{|u|}(a_u))_{u\in U}, \qquad \textit{pour tout noyau } V \textit{ de } U\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}(\vec{h}, U)\colon\ \mathrm{Cond}(\vec{A}, U) &\to \mathrm{Cond}(\vec{B}, U)\\ (a_u)_{u\in U} &\mapsto (h_{|u|}(a_u))_{u\in U}\end{aligned}$$

De plus, $\mathrm{Cond}(-, U)\colon \mathcal{V}^I \to \mathcal{V}$ *est un foncteur.*

3.5. Relèvements

On fixe dans cette section une classe $\mathscr{S}$ de $(\vee, 0)$-demi-treillis, close par produit fini et par réunion filtrante croissante, soit I un ensemble ordonné, soit $\vec{\kappa} = (\kappa_i)_{i\in I}$ une famille de cardinaux, soit $(U, |\cdot|)$ un recouvrement normé $\vec{\kappa}$-compatible de I, et soit $\mathcal{V}$ une classe d'algèbres de même type de similarité.

Proposition 3.5.1. *Soit $\vec{D} = (D_i, \phi_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$ un objet de $\mathscr{S}^I$, soit $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_s}(U, |\cdot|)$, soit $\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}\colon \mathrm{Cond}(\vec{D}, U) \twoheadrightarrow D_{|\boldsymbol{u}|}$ la projection canonique. Alors la partie*

$$\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}} = \{a \in \mathrm{Cond}(\vec{D}, U) \mid \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a) = 0\},$$

est un idéal de $\mathrm{Cond}(\vec{D}, U)$, et $\mathrm{Id}(\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}) \restriction {\uparrow}\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}\colon\ {\uparrow}\,\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}} \to \mathrm{Id}(D_{|\boldsymbol{u}|})$ est un isomorphisme, où nous abrégeons $(\mathrm{Id}\,\mathrm{Cond}(\vec{D}, U)) \uparrow \theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$ par ${\uparrow}\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$.

Démonstration. Le morphisme $\rho_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{Id}(\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}})$ est surjectif et $\rho_{\boldsymbol{u}}(\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}) = 0$, donc $\rho_{\boldsymbol{u}} \restriction {\uparrow}\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$ est surjectif.

Fixons $v \in \boldsymbol{u}$ tel que $|v| = |\boldsymbol{u}|$. Soient $L, L' \in {\uparrow}\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$ tels que $\rho_{\boldsymbol{u}}(L) \subseteq \rho_{\boldsymbol{u}}(L')$, il faut prouver que $L \subseteq L'$. Soit $a \in L$. Comme $\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a) \in \rho_{\boldsymbol{u}}(L')$, il existe $a' \in L'$ tel que $\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a) \leq \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a')$. Soit V un support commun de a et a' tel que $v \in V$. On a $|\boldsymbol{u}| = |v| \leq |V \cdot \boldsymbol{u}| \leq |\boldsymbol{u}|$, donc $|V \cdot \boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$, et donc $\phi_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|} = \mathrm{id}$. En conséquence

$$a_{V\cdot\boldsymbol{u}} = \phi_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}(a_{V\cdot\boldsymbol{u}}) = \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a) \leq \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a') = \phi_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}(a'_{V\cdot\boldsymbol{u}}) = a'_{V\cdot\boldsymbol{u}}.$$

Posons :

$$b_w = \begin{cases} a_w & \text{si } V \cdot w \neq V \cdot \boldsymbol{u} \\ 0 & \text{si } V \cdot w = V \cdot \boldsymbol{u} \end{cases}, \quad \text{pour tout } w \in U.$$

L'ensemble V est un support de b, et $\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(b) = \phi_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}(b_{V\cdot\boldsymbol{u}}) = 0$.

Soit $w \in U$. Si $V \cdot w \neq V \cdot \boldsymbol{u}$, alors $a_w = b_w \leq a'_w \vee b_w$. Si $V \cdot w = V \cdot \boldsymbol{u}$, alors $|\boldsymbol{u}| = |V \cdot \boldsymbol{u}| = |V \cdot w| \leq |w|$. Donc :

$$a'_w = \phi_{|V\cdot w|,|w|}(a'_{V\cdot w}) = \phi_{|\boldsymbol{u}|,|w|}(\phi_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}(a'_{V\cdot\boldsymbol{u}})) = \phi_{|\boldsymbol{u}|,|w|}(\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a')),$$

et de même, $a_w = \phi_{|\boldsymbol{u}|,|w|}(\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a))$. Comme $\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a) \leq \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a')$, nous obtenons que $a_w \leq a'_w$. Donc nous avons prouvé que $a \leq b \vee a'$. De $b \in \theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}} \in L'$ et $a' \in L'$ il découle $a \in L'$. Donc $L \subseteq L'$, par suite $\rho_{\boldsymbol{u}}$ est un plongement. □

LEMME 3.5.2. *Soit* $(\psi_i)_{i\in I} = \vec{\psi}\colon \vec{C} \to \vec{D}$ *une flèche de* $\mathscr{S}^I$, *soit* $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_s}(U, |\cdot|)$. *Alors :*

$$\psi_{|\boldsymbol{u}|} \circ \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{C}} = \pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}} \circ \mathrm{Cond}(\vec{\psi}, U),$$

et

$$\mathrm{Id}(\mathrm{Cond}(\vec{\psi}, U))(\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{C}}) \subseteq \theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\vec{C} = (C_i, \gamma_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$, soit $\vec{D} = (D_i, \delta_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$, soit V un noyau de U et soit $a \in \mathrm{Cond}_U(\vec{C}, V)$. Par la Proposition 3.4.4, V est aussi un noyau de $\mathrm{Cond}(\vec{\psi}, U)(a)$ et

$$\begin{aligned}
\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(\mathrm{Cond}(\vec{\psi}, U)(a)) &= \delta_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}((\mathrm{Cond}(\vec{\psi}, U)(a))_{V\cdot\boldsymbol{u}}) \\
&= \delta_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}(\psi_{|V\cdot\boldsymbol{u}|}(a_{V\cdot\boldsymbol{u}})) \\
&= \psi_{|\boldsymbol{u}|}(\gamma_{|V\cdot\boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|}(a_{V\cdot\boldsymbol{u}})) \\
&= \psi_{|\boldsymbol{u}|}(\pi_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}(a))
\end{aligned}$$

L'inclusion découle immédiatement de cette égalité. □

DÉFINITION 3.5.3. Soit $\vec{D}$ un objet de $\mathscr{S}^I$. Un *U-quasi-relèvement* de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}$ est un couple (τ, T), où $T \in \mathcal{V}$ et $\tau\colon \mathrm{Con_c}\, T \to \mathrm{Cond}(\vec{D}, U)$ est un $(\vee, 0)$-homomorphisme tel que $\uparrow\alpha_{\boldsymbol{u}} \to \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$, $\beta \mapsto \mathrm{Id}(\tau)(\beta) \vee \theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$ est un isomorphisme pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_e}(U, |\cdot|)$, où $\alpha_{\boldsymbol{u}} = \bigvee\{\beta \in \mathrm{Con_c}\, T \mid \tau(\beta) \in \theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}\}$.

Dans la définition ci-dessus nous avons utilise l'identification de $\mathrm{Con}\, T$ avec le treillis des idéaux de $\mathrm{Con_c}\, T$. Dans la suite nous allons étendre la Définition 3.5.3 des *objets* de $\mathscr{S}^I$ aux *diagrammes* de $\mathscr{S}^I$.

DÉFINITION 3.5.4. Soit J une catégorie et $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}^I$ un foncteur. Un *U-quasi-relèvement* de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{V}$ est un couple $(\vec{\tau}, \mathcal{J})$, où $\mathcal{J}\colon J \to \mathcal{V}$ est un foncteur et $\vec{\tau} = (\tau^j)_{j\in \mathrm{Ob}\, J}\colon \mathrm{Con_c} \circ \mathcal{J} \to \mathrm{Cond}(\mathcal{D}(-), U)$ est une transformation naturelle, tel que $(\tau^j, \mathcal{J}(j))$ est un U-quasi-relèvement de $\mathcal{D}(j)$ pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$.

Les lemmes suivants sont évidents.

Lemme 3.5.5. *Soit $\vec{D}$ un objet de $\mathscr{S}^I$, soit $T \in \mathcal{V}$ et soit $\tau\colon \operatorname{Con_c} T \to \operatorname{Cond}(\vec{D}, U)$ un isomorphisme. Alors (τ, T) est un U-quasi-relèvement de $\vec{D}$.*

Lemme 3.5.6. *Soit J une catégorie, soit $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}^I$ un foncteur, soit $\mathcal{J}\colon J \to \mathcal{V}$ un foncteur et soit $\tau = (\tau^j)_{j\in \operatorname{Ob} J}\colon \operatorname{Con_c} \circ \mathcal{J} \to \operatorname{Cond}(\mathcal{D}(-), U)$ un isomorphisme naturel. Alors $(\tau, \mathcal{J})$ est un U-quasi-relèvement de $\mathcal{D}$.*

Le lemme suivant exprime une propriété de commutativité entre le foncteur Cond et le foncteur $\operatorname{Con_c}$.

Lemme 3.5.7. *Soit $\vec{A} = (A_i, f_{i,j})_{i\le j \text{ dans } I}$ un objet de $\mathcal{V}^I$, posons :*

$$\vec{D} = \operatorname{Con_c} \circ \vec{A} = (\operatorname{Con_c} A_i, \operatorname{Con_c} f_{i,j})_{i\le j \text{ dans } I}.$$

Soit $p_{\boldsymbol{u}}\colon \operatorname{Cond}(\vec{A}, U) \twoheadrightarrow A_{|\boldsymbol{u}|}$ la projection canonique pour tout $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_s}(U, |\cdot|)$. Posons :

$$\begin{aligned} \tau\colon \operatorname{Con_c} \operatorname{Cond}(\vec{A}, U) &\to \operatorname{Cond}(\vec{D}, U) \\ \beta &\mapsto ((\operatorname{Con_c} p_v)(\beta))_{v\in U} \end{aligned}$$

Alors $(\tau, \operatorname{Cond}(\vec{A}, U))$ est un U-quasi-relèvement de $\vec{D}$.

Démonstration. Notons $\pi_{\boldsymbol{u}}\colon \operatorname{Cond}(\vec{D}, U) \to D_{|\boldsymbol{u}|}$ la projection canonique et posons $\theta_{\boldsymbol{u}} = \theta_{\boldsymbol{u}}^{\vec{D}}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_s}(U, |\cdot|)$. Soient $x, y \in \operatorname{Cond}(\vec{A}, U)$ et posons $\beta = \Theta_{\operatorname{Cond}(\vec{A},U)}(x, y)$. Alors $\tau(\beta) = (\Theta_{A_{|u|}}(x_u, y_u))_{u\in U}$. Soit V un support commun de x et y. Pour tout $u \in U$,

$$\begin{aligned} \Theta_{A_{|u|}}(x_u, y_u) &= \Theta_{A_{|u|}}(f_{|V\cdot u|,|u|}(x_{V\cdot u}), f_{|V\cdot u|,|u|}(y_{V\cdot u})) \\ &= \operatorname{Con_c}(f_{|V\cdot u|,|u|})(\Theta_{A_{|V\cdot u|}}(x_{V\cdot u}, y_{V\cdot u})) \end{aligned}$$

Donc V est un support de $\tau(\beta)$. Par suite τ prend ses valeurs dans $\operatorname{Cond}(\vec{D}, U)$. De plus, pour x, y, V et β comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} \pi_{\boldsymbol{u}}(\tau(\beta)) &= \operatorname{Con_c}(f_{|V\cdot \boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|})(\tau(\beta)_{V\cdot \boldsymbol{u}}) \\ &= \operatorname{Con_c}(f_{|V\cdot \boldsymbol{u}|,|\boldsymbol{u}|})(\Theta_{A_{|V\cdot \boldsymbol{u}|}}(x_{V\cdot \boldsymbol{u}}, y_{V\cdot \boldsymbol{u}})) \\ &= \Theta_{A_{|\boldsymbol{u}|}}(p_{\boldsymbol{u}}(x), p_{\boldsymbol{u}}(y)), \end{aligned}$$

donc $\pi_{\boldsymbol{u}} \circ \tau = \operatorname{Con_c} p_{\boldsymbol{u}}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_s}(U, |\cdot|)$.

Soit $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_s}(U, |\cdot|)$ et posons $\alpha_{\boldsymbol{u}} = \bigvee\{\beta \in \operatorname{Con_c}(\operatorname{Cond}(A, U)) \mid \tau(\beta) \in \theta_{\boldsymbol{u}}\}$. Les équivalences suivantes sont satisfaites, pour tout $\beta \in \operatorname{Con_c} \operatorname{Cond}(\vec{A}, U)$:

$$\begin{aligned} \beta \subseteq \ker p_{\boldsymbol{u}} &\iff \operatorname{Con}_c(p_{\boldsymbol{u}})(\beta) = 0 \\ &\iff \pi_{\boldsymbol{u}} \circ \tau(\beta) = 0 \\ &\iff \tau(\beta) \in \theta_{\boldsymbol{u}} \\ &\iff \beta \subseteq \alpha_{\boldsymbol{u}}, \end{aligned}$$

d'où $\alpha_{\boldsymbol{u}} = \ker p_{\boldsymbol{u}}$. Soit $\tau_{\boldsymbol{u}}\colon \uparrow \alpha_{\boldsymbol{u}} \to \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}}$ l'application définie par $\tau_{\boldsymbol{u}}(\beta) = (\operatorname{Id} \tau)(\beta) \vee \theta_{\boldsymbol{u}}$ pour tout $\beta \in \operatorname{Con} \operatorname{Cond}(\vec{A}, U)$ contenant $\alpha_{\boldsymbol{u}}$. Comme $(\operatorname{Id} \pi_{\boldsymbol{u}})(\theta_{\boldsymbol{u}}) = 0$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}} \arrow[dr, "\mathrm{Id}(\pi_{\boldsymbol{u}})"] & \\ \uparrow\alpha_{\boldsymbol{u}} \arrow[u, "\tau_{\boldsymbol{u}}"'] \arrow[r, "\mathrm{Con}(p_{\boldsymbol{u}})"'] & \mathrm{Con}(A_{|\boldsymbol{u}|}) \end{tikzcd}$$

Comme $(\mathrm{Id}\,\pi_{\boldsymbol{u}}) \restriction \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}}$ et $(\mathrm{Con}\,p_{\boldsymbol{u}}) \restriction \uparrow\alpha_{\boldsymbol{u}}$ sont tous les deux des isomorphismes, $\tau_{\boldsymbol{u}}$ l'est aussi. □

LEMME 3.5.8. *Soit J une catégorie, soit $\mathcal{A}\colon J \to \mathcal{V}^I$ un foncteur, posons $\mathcal{D} = \mathrm{Con_c} \circ \mathcal{A}$. Soit $\tau^j\colon \mathrm{Con_c}(\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(j), U)) \to \mathrm{Cond}(\mathrm{Con_c}(\mathcal{A}(j)), U)$ l'application du Lemme* 3.5.7 *pour tout $j \in J$. Soit $\tau = (\tau^j)_{j\in \mathrm{Ob}\, J}$. Alors $(\tau, \mathrm{Cond}(\mathcal{A}(-), U))$ est un U-quasi-relèvement de $\mathcal{D}$.*

DÉMONSTRATION. Nous savons (cf. Lemme 3.5.7) que $(\tau^j, \mathrm{Cond}(\mathcal{A}(j), U))$ est un U-quasi-relèvement de $\mathcal{D}(j)$ pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$.

Soit $\mathcal{A}(j) = (A_i^j, t_{i,i'}^j)_{i\le i' \text{ dans } I}$ pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$. Soit $f\colon j \to k$ une flèche de J, soit $\mathcal{A}(f) = (a_i^f)_{i\in I}$, soit $p_u^k\colon \mathrm{Cond}(\mathcal{A}(k), U) \twoheadrightarrow A_{|u|}^k$ la projection canonique pour tout $u \in U$. Soient $x, y \in \mathrm{Cond}(\mathcal{A}(j), U)$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cond}\Big(\mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(f), U\Big)\Big(\tau^j\Big(\Theta_{\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(j),U)}(x,y)\Big)\Big)\\
=&\mathrm{Cond}\Big(\mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(f), U\Big)\Big(\Big(\Theta_{A^j_{|u|}}(x_u,y_u)\Big)_{u\in U}\Big)\\
=&\Big(\mathrm{Con_c}(a^f_{|u|})\Big(\Theta_{A^j_{|u|}}(x_u,y_u)\Big)\Big)_{u\in U}\\
=&\Big(\Theta_{A^k_{|u|}}\Big(a^f_{|u|}(x_u), a^f_{|u|}(y_u)\Big)\Big)_{u\in U}\\
=&\Big(\Theta_{A^k_{|u|}}\Big(p^k_u(\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)(x)), p^k_u(\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)(y))\Big)\Big)_{u\in U}\\
=&\Big(\mathrm{Con_c}(p^k_u)\Big(\Theta_{\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(k),U)}\Big(\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)(x), \mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)(y)\Big)\Big)\Big)_{u\in U}\\
=&\tau^k\Big(\Theta_{\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(k),U)}\Big(\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)(x), \mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)(y)\Big)\Big)\\
=&\tau^k\Big(\mathrm{Con_c}\Big(\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)\Big)\Big(\Theta_{\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(j),U)}(x,y)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cond}(\mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(j), U) \arrow[r, "\mathrm{Cond}(\mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(f),U)"] & \mathrm{Cond}(\mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(k), U) \\ \mathrm{Con_c}\,\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(j), U) \arrow[u, "\tau^j"] \arrow[r, "\mathrm{Con_c}\,\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(f),U)"] & \mathrm{Con_c}\,\mathrm{Cond}(\mathcal{A}(k), U) \arrow[u, "\tau^k"'] \end{tikzcd}$$

ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.5.9. *Soit J une petite catégorie, supposons que $\mathcal{V}$ est clos par image homomorphe, et est $\left(\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=, J, (\kappa_{|\boldsymbol{u}|})_{\boldsymbol{u}\in\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=}\right)$-Löwenheim-Skolem. Soit $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}^I$ un foncteur, soit $(\vec{\tau}, \mathcal{A})$ un U-quasi-relèvement de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{D}(j) = \vec{D}^j = \left(D_i^j, \phi_{i,i'}^j\right)_{i\leq i' \text{ dans } I}$ pour tout $j \in \mathrm{Ob}\, J$, soit $\mathcal{D}(f) = \vec{\psi}^f = (\psi_i^f)_{i\in I}$ pour tout $f \in \mathrm{Mor}\, J$. Si $\sum_{j\in\mathrm{Ob}\,J} \mathrm{card}\, D_i^j < \kappa_i$ pour tout $i \in I$, alors il existe dans $\mathcal{V}$ un relèvement du diagramme $\widehat{\mathcal{D}}\colon I \times J \to \mathscr{S}$, associé à $\mathcal{D}$ (cf. Proposition 2.1.11).*

Démonstration. Fixons $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)$ et $j \in \mathrm{Ob}\, J$, posons $\theta_{\boldsymbol{u}}^j = \theta_{\boldsymbol{u}}^{\mathcal{D}(j)}$ comme définie dans la Proposition 3.5.1, posons :

$$\alpha_{\boldsymbol{u}}^j = \bigvee\{\beta \in \mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(j) \mid \tau^j(\beta) \leq \theta_{\boldsymbol{u}}^j\},$$

posons $\tau_{\boldsymbol{u}}^j\colon \uparrow \alpha_{\boldsymbol{u}}^j \to \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}}^j$, $\beta \mapsto \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta) \vee \theta_{\boldsymbol{u}}^j$, comme dans la Définition 3.5.3, notons $p_{\boldsymbol{u}}^j\colon \mathcal{A}(j) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(j)/\alpha_{\boldsymbol{u}}^j$ la projection canonique, notons aussi $\pi_{\boldsymbol{u}}^j\colon \mathrm{Cond}(\mathcal{D}(j), U) \twoheadrightarrow D_{|\boldsymbol{u}|}^j$ la projection canonique définie dans le Lemme 3.4.2(7). L'application $\chi_{\boldsymbol{u}}^j = \mathrm{Con}(p_{\boldsymbol{u}}^j) \circ (\tau_{\boldsymbol{u}}^j)^{-1} \circ (\mathrm{Id}(\pi_{\boldsymbol{u}}^j) \restriction \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}}^j)^{-1}$ est un isomorphisme (cf Figure 3.2).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(D_{|\boldsymbol{u}|}^j) \arrow[rrr, bend left, "\chi_{\boldsymbol{u}}^j"] & \uparrow\theta_{\boldsymbol{u}}^j \arrow[l, "\mathrm{Id}\,\pi_{\boldsymbol{u}}^j"'] & \uparrow\alpha_{\boldsymbol{u}}^j \arrow[l, "\tau_{\boldsymbol{u}}^j"'] \arrow[r, "\mathrm{Con}\,p_{\boldsymbol{u}}^j"'] & \mathrm{Con}(\mathcal{A}(j)/\alpha_{\boldsymbol{u}}^j)
\end{tikzcd}$$

Figure 3.2. L'isomorphisme $\chi_{\boldsymbol{u}}^j$.

De plus $\sum_{j\in\mathrm{Ob}\,J} \mathrm{card}\,\mathrm{Con_c}(\mathcal{A}(j)/\alpha_{\boldsymbol{u}}^j) = \sum_{j\in\mathrm{Ob}\,J} \mathrm{card}\, D_{|\boldsymbol{u}|}^j < \kappa_{|\boldsymbol{u}|}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=$. Donc il existe une famille $(B_{\boldsymbol{u}}^j)_{\boldsymbol{u}\in\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=}^{j\in\mathrm{Ob}\,J}$ d'algèbres telles que :

(1) L'algèbre $B_{\boldsymbol{u}}^j$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}(j)$,

(2) L'algèbre $B_{\boldsymbol{u}}^j/\alpha_{\boldsymbol{u}}^j$ est dans $\mathcal{V}$,

(3) L'inclusion $B_{\boldsymbol{u}}^j \subseteq B_{\boldsymbol{v}}^j$ est satisfaite,

(4) L'inclusion $\mathcal{A}(f)(B_{\boldsymbol{u}}^j) \subseteq B_{\boldsymbol{u}}^k$ est satisfaite,

(5) Le morphisme $\mathrm{Con}(q_{\boldsymbol{u}}^j)$ est un isomorphisme, où $q_{\boldsymbol{u}}^j\colon B_{\boldsymbol{u}}^j/\alpha_{\boldsymbol{u}}^j \to \mathcal{A}(j)/\alpha_{\boldsymbol{u}}^j$ est l'injection canonique,

(6) L'inégalité $\sum_{j'\in\mathrm{Ob}\,J} \mathrm{card}\, B_{\boldsymbol{u}}^{j'} < \kappa_{|\boldsymbol{u}|}$ est satisfaite,

pour tout $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$ dans $\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=$ et pour tout morphisme $f\colon j \to k$ dans J. De plus, nous pouvons étendre cette famille à $\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)$, en posant $B_{\boldsymbol{u}}^j = \mathcal{A}(j)$, les assertions $(1) - (5)$ sont satisfaites pour tout $\boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{v}$ dans $\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)$, et pour tout morphisme $f\colon j \to k$ dans J.

Posons :

$$\begin{aligned}
F\colon\ & \mathrm{Id_e}(U,|\cdot|) \to \mathfrak{P}(U)\\
& \boldsymbol{u} \mapsto \bigcup\{\mathrm{supp}\,\tau^j(\Theta_{\mathcal{A}(j)}(x,y)) \mid j \in \mathrm{Ob}\, J \text{ et } x,y \in B_{\boldsymbol{u}}^j\}
\end{aligned}$$

alors $F(\boldsymbol{u}) < \kappa_{|\boldsymbol{u}|}$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)^{=}$. Comme $(U, |\cdot|)$ est $\vec{\kappa}$-compatible, il existe une application croissante $\sigma\colon I \to \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)$ telle que :

(1) L'égalité $|\sigma(i)| = i$ est satisfaite pour tout $i \in I$.

(2) L'égalité $V \cdot \sigma(i) = V \cdot \sigma(i')$ est satisfaite pour tous $i \leq i'$ dans I et tout noyau V de U inclus dans $F(\sigma(i))$.

Soit $i \in I$ et $j \in \operatorname{Ob} J$. L'application $\xi_i^j = (\mathrm{Con}(q^j_{\sigma(i)}))^{-1} \circ \chi_{\sigma(i)}$ est un isomorphisme (cf Figure 3.3) et l'algèbre $\mathcal{B}(i,j) = B^j_{\sigma(i)}/\alpha^j_{\sigma(i)} \in \mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{V}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(D_i^j) \arrow[rrr, bend left, "\chi^j_{\sigma(i)}"] \arrow[drrr, bend right, "\xi_i^j"'] & {\uparrow}\theta^j_{\sigma(i)} \arrow[l, "\mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)})"] & {\uparrow}\alpha^j_{\sigma(i)} \arrow[l, "\tau^j_{\sigma(i)}"] \arrow[r, "\mathrm{Con}(p^j_{\sigma(i)})"'] & \mathrm{Con}(\mathcal{A}(j)/\alpha^j_{\sigma(i)}) \\
 & & & \mathrm{Con}(\mathcal{B}(i,j)) \arrow[u, "\mathrm{Con}(q^j_{\sigma(i)})"']
\end{tikzcd}$$

FIGURE 3.3. L'isomorphisme ξ_i^j.

Soit $i \leq i'$ dans I, soit $j \in \operatorname{Ob} J$, soient $x, y \in B^j_{\sigma(i)}$, soit $\beta = \Theta_{\mathcal{A}(j)}(x,y)$. Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Con}(p^j_{\sigma(i)})(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i)}) &= \Theta_{\mathcal{A}(j)/\alpha^j_{\sigma(i)}}(x/\alpha^j_{\sigma(i)}, y/\alpha^j_{\sigma(i)}) \\
&= \mathrm{Con}(q^j_{\sigma(i)})(\Theta_{\mathcal{B}(i,j)}(x/\alpha^j_{\sigma(i)}, y/\alpha^j_{\sigma(i)})). \qquad (3.5.1)
\end{aligned}$$

de même :

$$\mathrm{Con}(p^j_{\sigma(i')})(\beta) = \mathrm{Con}(q^j_{\sigma(i')})(\Theta_{\mathcal{B}(i',j)}(x/\alpha^j_{\sigma(i')}, y/\alpha^j_{\sigma(i')})). \qquad (3.5.2)$$

De plus, posons $V = \operatorname{supp}(\tau^j(\beta))$, alors $V \subseteq F(\sigma(i))$, donc $V \cdot \sigma(i) = V \cdot \sigma(i')$ et donc :

$$\begin{aligned}
\pi^j_{\sigma(i')}(\tau^j(\beta)) &= \phi_{|V\cdot\sigma(i')|, |\sigma(i')|}(\tau^j(\beta)_{V\cdot\sigma(i')}) && \text{par le Lemme 3.4.2(7)} \\
&= \phi_{|V\cdot\sigma(i)|, i'}(\tau^j(\beta)_{V\cdot\sigma(i)}) && \text{car } V\cdot\sigma(i') = V\cdot\sigma(i) \text{ et } |\sigma(i')| = i' \\
&= \phi_{i,i'} \circ \phi_{|V\cdot\sigma(i)|, i}(\tau^j(\beta)_{V\cdot\sigma(i)}) \\
&= \phi_{i,i'} \circ \pi^j_{\sigma(i)}(\tau^j(\beta)) && \text{par le Lemme 3.4.2(7).}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)}) \circ \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta) = \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i')}) \circ \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta) \qquad (3.5.3)$$

Comme $\alpha^j_{\boldsymbol{u}} = \bigvee\{\beta \in \mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(j) \mid \tau^j(\beta) \leq \theta^j_{\boldsymbol{u}}\}$, nous avons $\mathrm{Id}(\tau^j)(\alpha^j_{\boldsymbol{u}}) \leq \theta^j_{\boldsymbol{u}}$. Donc :

$$\tau^j_{\boldsymbol{u}}(\beta \vee \alpha^j_{\boldsymbol{u}}) = \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta \vee \alpha^j_{\boldsymbol{u}}) \vee \theta^j_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta) \vee \theta^j_{\boldsymbol{u}}, \quad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|). \qquad (3.5.4)$$

Comme $\mathrm{Id}(\pi^j_{\boldsymbol{u}})(\theta^j_{\boldsymbol{u}}) = 0$, les équations suivantes sont satisfaites :

$$\mathrm{Id}(\pi^j_{\boldsymbol{u}}) \circ \tau^j_{\boldsymbol{u}}(\beta \vee \alpha^j_{\boldsymbol{u}}) = \mathrm{Id}(\pi^j_{\boldsymbol{u}}) \circ \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta), \quad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in \mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|). \qquad (3.5.5)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)}) \circ \tau^j_{\sigma(i)}(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i)}) &= \mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)}) \circ \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta) && \text{par (3.5.5)}\\
&= \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i')}) \circ \mathrm{Id}(\tau^j)(\beta) && \text{par (3.5.3)}
\end{aligned}$$

et donc, par (3.5.5), les égalités suivantes sont satisfaites

$$\mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)}) \circ \tau^j_{\sigma(i)}(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i)}) = \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i')}) \circ \mathrm{Id}(\tau^j_{\sigma(i')})(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i')}) \tag{3.5.6}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&\xi^j_{i'} \circ \mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ (\xi^j_i)^{-1}(\Theta_{\mathcal{B}(i,j)}(x/\alpha^j_{\sigma(i)}, y/\alpha^j_{\sigma(i)}))\\
&= \xi^j_{i'} \circ \mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)}) \circ \tau^j_{\sigma(i)} \circ (\mathrm{Con}(p^j_{\sigma(i)}) \restriction \uparrow\alpha^j_{\sigma(i)})^{-1}\\
&\qquad \circ \mathrm{Con}(q^j_{\sigma(i)})(\Theta_{\mathcal{B}(i,j)}(x/\alpha^j_{\sigma(i)}, y/\alpha^j_{\sigma(i)}))\\
&= \xi^j_{i'} \circ \mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'}) \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i)}) \circ \tau^j_{\sigma(i)}(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i)}) && \text{par (3.5.1)}\\
&= \xi^j_{i'} \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i')}) \circ \tau^j_{\sigma(i')}(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i')}) && \text{par (3.5.6)}\\
&= (\mathrm{Con}\, q^j_{\sigma(i')})^{-1} \circ \mathrm{Con}(p^j_{\sigma(i')}) \circ (\tau^j_{\sigma(i')})^{-1}\\
&\qquad \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i')} \restriction \uparrow\theta^j_{\sigma(i')})^{-1} \circ \mathrm{Id}(\pi^j_{\sigma(i')}) \circ \tau^j_{\sigma(i')}(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i')})\\
&= (\mathrm{Con}\, q^j_{\sigma(i')})^{-1} \circ \mathrm{Con}(p^j_{\sigma(i')})(\beta \vee \alpha^j_{\sigma(i')})\\
&= \Theta_{\mathcal{B}(i',j)}(x/\alpha^j_{\sigma(i')}, y/\alpha^j_{\sigma(i')}). && \text{par (3.5.2)}
\end{aligned}$$

Il en découle que le morphisme qui suit est bien défini :

$$\begin{aligned}
g^j_{i,i'} \colon \mathcal{B}(i,j) &\to \mathcal{B}(i',j)\\
x/\alpha^j_{\sigma(i)} &\mapsto x/\alpha^j_{\sigma(i')}
\end{aligned}$$

et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(D^j_{i'}) \arrow[r, "\xi^j_{i'}"] & \mathrm{Con}(\mathcal{B}(i',j))\\
\mathrm{Id}(D^j_i) \arrow[r, "\xi^j_i"] \arrow[u, "\mathrm{Id}(\phi^j_{i,i'})"] & \mathrm{Con}(\mathcal{B}(i,j)) \arrow[u, "\mathrm{Con}(g^j_{i,i'})"']
\end{tikzcd} \tag{3.5.7}$$

Soit $f\colon j \to k$ une flèche de J, soit $i \in I$ et posons $\boldsymbol{u} = \sigma(i)$. Comme $(\vec{\tau}, \mathcal{A})$ est un U-quasi-relèvement de $\mathcal{D}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}(D^k_i) & \mathrm{Id}(\mathrm{Cond}(\mathcal{D}(k),U)) \arrow[l, "\mathrm{Id}(\pi^k_{\boldsymbol{u}})"'] & \mathrm{Con}(\mathcal{A}(k)) \arrow[l, "\mathrm{Id}(\tau^k)"']\\
\mathrm{Id}(D^j_i) \arrow[u, "\mathrm{Id}(\psi^f_i)"] & \mathrm{Id}(\mathrm{Cond}(\mathcal{D}(j),U)) \arrow[l, "\mathrm{Id}(\pi^j_{\boldsymbol{u}})"'] \arrow[u, "\mathrm{Cond}(\mathcal{D}(f),U)"] & \mathrm{Con}(\mathcal{A}(j)) \arrow[l, "\mathrm{Id}(\tau^j)"'] \arrow[u, "\mathrm{Con}(\mathcal{A}(f))"]
\end{tikzcd} \tag{3.5.8}$$

Soit $\beta \in \mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}(j)$ telle que $\tau^j(\beta) \in \theta^k_{\boldsymbol{u}}$. Donc $\pi^j_{\boldsymbol{u}}(\tau^j(\beta)) = 0$, d'où :

$$0 = \psi^f_i(\pi^j_{\boldsymbol{u}}(\tau^j(\beta))) = \pi^k_{\boldsymbol{u}}\Big(\tau^k\Big(\mathrm{Con_c}(\mathcal{A}(f))(\beta)\Big)\Big)$$

et donc $\mathrm{Con}(\mathcal{A}(f))(\beta) \leq \alpha^k_{\boldsymbol{u}}$. Ce qui prouve :

$$\mathrm{Con}(\mathcal{A}(f))(\alpha^j_{\boldsymbol{u}}) = \mathrm{Con}(\mathcal{A}(f))\Big(\bigvee\{\beta \in \mathrm{Con_c}(\mathcal{A}(j)) \mid \tau^j(\beta) \in \theta^k_{\boldsymbol{u}}\}\Big) \leq \alpha^k_{\boldsymbol{u}}$$

ce qui montre que le morphisme suivant est bien défini :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i \colon \mathcal{A}(j)/\alpha^j_{\boldsymbol{u}} &\to \mathcal{A}(k)/\alpha^k_{\boldsymbol{u}} \\ x/\alpha^j_{\boldsymbol{u}} &\mapsto \mathcal{A}(f)(x)/\alpha^k_{\boldsymbol{u}} \end{aligned}$$

et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(k) \arrow[r, "p^k_{\sigma(i)}"] & \mathcal{A}(k)/\alpha^k_{\sigma(i)} & \mathcal{B}(i,k) \arrow[l, "q^k_{\sigma(i)}"'] \\ \mathcal{A}(j) \arrow[u, "\mathcal{A}(f)"] \arrow[r, "p^j_{\sigma(i)}"] & \mathcal{A}(j)/\alpha^j_{\sigma(i)} \arrow[u, "\tilde{f}_i"] & \mathcal{B}(i,j) \arrow[l, "q^j_{\sigma(i)}"'] \arrow[u, "\tilde{f}_i\restriction\mathcal{B}(i,j)"'] \end{tikzcd} \tag{3.5.9}$$

En combinant les diagrammes commutatifs (3.5.9) et (3.5.10) avec les définitions de ξ^k_iet de ξ^j_i on montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id}(D^k_i) \arrow[r, "\xi^k_i"] & \mathrm{Con}(\mathcal{B}(i,k)) \\ \mathrm{Id}(D^j_i) \arrow[u, "\mathrm{Id}(\psi^f_i)"] \arrow[r, "\xi^j_i"] & \mathrm{Con}(\mathcal{B}(i,j)) \arrow[u, "\mathrm{Con}(\tilde{f}_i\restriction\mathcal{B}(i,j))"'] \end{tikzcd} \tag{3.5.10}$$

Pour $i \leq i'$ dans I et $f \colon j \to k$ dans J, posons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(i \to i', f \colon j \to k) \colon \mathcal{B}(i,j) &\to \mathcal{B}(i',k) \\ x/\alpha^j_{\sigma(i)} &\mapsto \mathcal{A}(f)(x)/\alpha^k_{\sigma(i')}. \end{aligned}$$

Soit $i'' \geq i'$ dans I et $f' \colon k \to k'$ dans J, alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(i' \to i'', f') \circ \mathcal{B}(i \to i', f)(x/\alpha^j_{\sigma(i)}) &= \mathcal{B}(i' \to i'', f')(\mathcal{A}(f)(x)/\alpha^k_{\sigma(i')}) \\ &= \mathcal{A}(f')(\mathcal{A}(f)(x))/\alpha^{k'}_{\sigma(i')} \\ &= \mathcal{A}(f' \circ f)(x)/\alpha^{k'}_{\sigma(i')} \\ &= \mathcal{B}(i \to i'', f' \circ f)(x/\alpha^j_{\sigma(i)}). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}\colon I \times J \to \mathcal{V}$ est un foncteur. De plus par (3.5.7) et (3.5.10) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}(D_{i'}^k) \arrow[r, "\xi_{i'}^k"] & \operatorname{Con}(\mathcal{B}(i',k)) \\
\operatorname{Id}(D_i^k) \arrow[u, "\operatorname{Id}(\phi_{i,i'}^k)"] \arrow[r, "\xi_{i'}^k"] & \operatorname{Con}(\mathcal{B}(i,k)) \arrow[u, "\operatorname{Con}(g_{i,i'}^k)"'] \\
\operatorname{Id}(D_i^j) \arrow[u, "\operatorname{Id}(\psi_i^f)"] \arrow[r, "\xi_i^j"] & \operatorname{Con}(\mathcal{B}(i,j)) \arrow[u, "\operatorname{Con}(\tilde{f}_i\restriction\mathcal{B}(i,j)))"']
\end{tikzcd}$$

Comme $\widehat{\mathcal{D}}(i \leq i', f) = \phi_{i,i'}^k \circ \psi_i^f$ et $\mathcal{B}(i \to i', f) = g_{i,i'}^k \circ \tilde{f}_i$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}(\widehat{\mathcal{D}}(i',k)) \arrow[r, "\xi_{i'}^k"] & \operatorname{Con}(\mathcal{B}(i',k)) \\
\operatorname{Id}(\widehat{\mathcal{D}}(i,j)) \arrow[u, "\operatorname{Id}(\vec{\mathcal{D}}(i\to i',f))"] \arrow[r, "\xi_i^j"] & \operatorname{Con}(\mathcal{B}(i,j)) \arrow[u, "\operatorname{Con}(\mathcal{B}(i\to i',f))"']
\end{tikzcd}$$

□

3.6. Points critiques

Définition 3.6.1. Soit $\mathcal{V}$ une classe d'algèbres de même type de similarité. La *classe de congruence compactes* de $\mathcal{V}$ est la classe de tous les $(\vee, 0)$-demi-treillis S telles qu'il existe $A \in \mathcal{V}$ telle que S est isomorphe à $\operatorname{Con_c} A$. Nous notons cette classe $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}$.

Définition 3.6.2. Soit $\mathcal{V}_1$ une classe d'algèbres de même type de similarité, soit $\mathcal{V}_2$ une classe d'algèbres de même type de similarité. Le *point critique de* $\mathcal{V}_1$ *sous* $\mathcal{V}_2$ est :

$$\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \min\{\operatorname{card} D \mid D \in \operatorname{Con_c}(\mathcal{V}_1) - \operatorname{Con_c}(\mathcal{V}_2)\},$$

si $\operatorname{Con_c} \mathcal{V}_1 \nsubseteq \operatorname{Con_c} \mathcal{V}_2$, sinon nous posons $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \infty$.

Le *point critique symétrique de* $\mathcal{V}_1$ *et* $\mathcal{V}_2$ est défini par

$$\operatorname{crit^s}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \min\{\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2), \operatorname{crit}(\mathcal{V}_2; \mathcal{V}_1)\}.$$

simplement appelé *point critique* dans [**37**].

Le corollaire suivant prouve que, pour une catégorie J fixée et un arbre T, si on peut relever dans $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ les même diagrammes indexés par J de $(\vee, 0)$-demi-treillis «pas trop grands», alors on peut relever dans $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ les même diagrammes indexés par $T \times J$ de $(\vee, 0)$-demi-treillis «pas trop grands». Remarquons de plus que la condition (1) ci-dessous est automatiquement vérifiée si $\operatorname{card} \mathscr{L}_1 \leq \kappa$ et $\operatorname{card} \mathscr{L}_2 \leq \lambda$.

Corollaire 3.6.3. *Soit $\mathscr{S}$ la variété de tous les $(\vee, 0)$-demi-treillis, soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ des types de similarité, soit $\mathcal{V}_1$ une variété de $\mathscr{L}_1$-algèbres, soit $\mathcal{V}_2$ une variété de $\mathscr{L}_2$-algèbres, soient $\lambda < \kappa$ des cardinaux infinis, soit I un arbre bien fondé et soit J une petite catégorie, tels que :*

(1) $\mathcal{V}_1$ *est localement* $\leq \kappa$ *et* $\mathcal{V}_2$ *est localement* $\leq \lambda$.

(2) $\operatorname{card} \operatorname{Mor}(J) < \kappa$.

(3) $\operatorname{card} I \leq \kappa$.

(4) $\operatorname{card}(\downarrow i) < \operatorname{cf} \kappa$ *pour tout* $i \in I$.

(5) *Tout foncteur* $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}$ *tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(j) \leq \kappa$ *pour tout* $j \in \operatorname{Ob} J$*, qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$*, a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$.

Alors tout foncteur $\mathcal{D}\colon I \times J \to \mathscr{S}$ *tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(i,j) < \kappa$ *pour tout* $i \in I$ *et tout* $j \in \operatorname{Ob} J$*, qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$*, a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{D}\colon I \times J \to \mathscr{S}$ un foncteur tel que $\operatorname{card} \mathcal{D}(i,j) < \kappa$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in \operatorname{Ob} J$, soit $\mathcal{A}\colon I \times J \to \mathcal{V}_1$ un relèvement de $\mathcal{D}$. Notons $\alpha_{i,j}$ la congruence identité de $\mathcal{A}(i,j)$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in \operatorname{Ob} J$. Par le Lemme 3.1.7 nous pouvons supposer :

$$\operatorname{card} \mathcal{A}(i,j) \leq \kappa + \sum_{i' \leq i} \sum_{j' \in \operatorname{Ob} J} \sum_{f\colon j' \to j} \operatorname{card} \mathcal{D}(i',j') \leq \kappa.$$

De plus par le Corollaire 3.2.7 il existe un recouvrement normé $(U, |\cdot|)$ étroit et κ-compatible de I tel que $\operatorname{card} U \leq \kappa$. Comme vu dans la Proposition 2.1.11, le foncteur $\mathcal{A}$ correspond à un foncteur $\widetilde{\mathcal{A}}\colon J \to \mathcal{V}_1^I$ et le foncteur $\mathcal{D}$ correspond à un foncteur $\widetilde{\mathcal{D}}\colon J \to \mathscr{S}^I$. Le Lemme 3.5.8 implique qu'il existe $\tau = (\tau^j)_{j \in \operatorname{Ob} J}$ tel que $(\tau, \operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{A}}(-), U))$ est un U-quasi-relèvement de $\widetilde{\mathcal{D}}$ et :

$$\operatorname{card} \operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{A}}(j), U) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \operatorname{card} \prod_{u \in V} \mathcal{A}(|u|, j) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \kappa \leq \kappa, \quad \text{pour tout } j \in \operatorname{Ob} J$$

Donc il existe un relèvement de $\operatorname{Con_c} \operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{A}}(-), U)$ dans $\mathcal{V}_2$, et donc il existe un U-quasi-relèvement $\mathcal{B}\colon J \to \mathcal{V}_2$ de $\widetilde{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{V}_2$. De plus le Lemme 3.1.8 implique que $\mathcal{V}_2$ est $(\operatorname{Id_e}(U, |\cdot|)^=, J, (\kappa)_{\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_e}(U,|\cdot|)^=})$-Löwenheim-Skolem, donc, par le Théorème 3.5.9, $\mathcal{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$. □

En raisonnant par récurrence, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.6.4. *Soit* $\mathscr{S}$ *la variété de tous les* $(\vee, 0)$*-demi-treillis, soient* $\mathscr{L}_1$ *et* $\mathscr{L}_2$ *des types de similarité, soit* $\mathcal{V}_1$ *une variété de* $\mathscr{L}_1$*-algèbres, soit* $\mathcal{V}_2$ *une variété de* $\mathscr{L}_2$*-algèbres, soit* κ *un cardinal infini, soit* $I_1, I_2, \dots, I_n$ *des arbres, soit* J *une catégorie, tels que :*

(1) $\mathcal{V}_1$ *est localement* $\leq \kappa^+$ *et* $\mathcal{V}_2$ *est localement* $\leq \kappa$.

(2) $\operatorname{card} I_1 + \operatorname{card} I_2 + \cdots + \operatorname{card} I_{n-1} + \operatorname{card} \operatorname{Mor} J \leq \kappa$.

(3) $\operatorname{card} I_n \leq \kappa^+$.

(4) $\operatorname{card}(\downarrow i) \leq \kappa$ *pour tout* $i \in I_n$.

(5) *Tout diagramme de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}$*, tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(j) \leq \kappa^{+n}$*, qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$ *a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$.

Alors tout diagramme de $(\vee, 0)$*-demi-treillis* $\mathcal{D}\colon I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times J \to \mathscr{S}$*, tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(i_1, i_2, \ldots, i_n, j) \leq \kappa$ *pour tout* $(i_1, i_2, \ldots, i_n, j) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times \operatorname{Ob} J$*, qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$ *a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$*.*

Le corollaire suivant est similaire au Corollaire 3.6.3. Il montre qu'avec des variétés finiment engendrées d'algèbres congruence-distributives, nous pouvons aller un cran plus loin.

Corollaire 3.6.5. *Soit* $\mathscr{S}$ *la variété de tous* $(\vee, 0)$*-demi-treillis, soient* $\mathscr{L}_1$ *et* $\mathscr{L}_2$ *des types de similarité, soit* $\mathcal{V}_1$ *une variété de* $\mathscr{L}_1$*-algèbres, soit* $\mathcal{V}_2$ *une variété finiment engendrée de* $\mathscr{L}_2$*-algèbres congruence-distributives, soit* I *un arbre initialement fini, et* J *un ensemble ordonné fini, tels que :*

(1) $\mathcal{V}_1$ *est localement* $\leq \aleph_0$*.*
(2) $\operatorname{card} I \leq \aleph_0$.
(3) *Tout foncteur* $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}$ *tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(j) \leq \aleph_0$ *pour tout* $j \in J$*, qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$ *a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$*.*

Alors tout foncteur $\mathcal{D}\colon I \times J \to \mathscr{S}$*, tel que* $\mathcal{D}(i, j)$ *est fini pour tout* $(i, j) \in I \times J$*, qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$ *a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{D}\colon I \times J \to \mathscr{S}$ un foncteur tel que $\mathcal{D}(i, j)$ est fini pour tout $(i, j) \in I \times J$. Soit $\mathcal{A}\colon I \times J \to \mathcal{V}_1$ un relèvement de $\mathcal{D}$. Notons $\alpha_{i,j}$ la congruence identité de $\mathcal{A}(i, j)$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. En utilisant le Lemme 3.1.7, nous pouvons supposer que :

$$\operatorname{card} \mathcal{A}(i, j) \leq \aleph_0 + \sum_{i' \leq i} \sum_{j' \leq j} \operatorname{card} \mathcal{D}(i', j') \leq \aleph_0.$$

De plus, par le Corollaire 3.2.7, il existe un recouvrement normé $(U, |\cdot|)$ de I étroit et $\aleph_0$-compatible tel que $\operatorname{card} U \leq \aleph_0$. Le foncteur $\mathcal{A}$ correspond à un foncteur $\widetilde{\mathcal{A}}\colon J \to \mathcal{V}^I$ et le foncteur $\mathcal{D}$ correspond à un foncteur $\widetilde{\mathcal{D}}\colon J \to \mathcal{V}^I$. Le Lemme 3.5.8 montre qu'il existe $\tau = (\tau^j_{j \in J})$ tel que $(\tau, \operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{A}}(-), U))$ est un U-quasi-relèvement de $\widetilde{\mathcal{D}}$, et :

$$\operatorname{card} \operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{A}}(j), U) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \operatorname{card} \prod_{u \in V} \mathcal{A}(|u|, j) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \aleph_0 = \aleph_0, \text{ pour tout } j \in J.$$

Le Lemme 3.1.10 implique que $\mathcal{V}_2$ est $(\mathrm{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)^{=}, J, \aleph_0)$-Löwenheim-Skolem. Donc par le Théorème 3.5.9, $\mathcal{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$. □

En combinant le Corollaire 3.6.4 et le Corollaire 3.6.5, nous obtenons le corollaire suivant. Ce résultat est similaire au Corollaire 3.6.4, mais avec des diagrammes de $(\vee, 0)$-demi-treillis finis. Il permet de donner une borne sur le point critique si on trouve un diagramme fini de $(\vee, 0)$-demi-treillis finis, relevable dans la première variété mais pas dans la seconde.

Corollaire 3.6.6. *Soit* $\mathscr{S}$ *la variété de tous les* $(\vee, 0)$*-demi-treillis, soient* $\mathscr{L}_1$ *et* $\mathscr{L}_2$ *des types de similarité, soit* $\mathcal{V}_1$ *une variété de* $\mathscr{L}_1$*-algèbres localement* $\leq \aleph_0$*, soit* $\mathcal{V}_2$ *une variété finiment engendrée de* $\mathscr{L}_2$*-algèbres congruence-distributives, soit* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *des arbres finis, soit* I_{n+1} *un arbre dénombrable initialement fini. Si* $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \aleph_n$*, alors* *tout foncteur* $\mathcal{D}\colon I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n+1} \to \mathcal{S}$ *tel que* $\mathcal{D}(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ *est fini pour tout* $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n+1}$, *qui a un relèvement dans* $\mathcal{V}_1$, *a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$.

Le corollaire suivant est une variante du Corollaire 3.6.3, mais avec une classe de $(\vee, 0)$-demi-treillis et une variété d'algèbres.

Corollaire 3.6.7. *Soit* $\mathcal{S}$ *une classe de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*) *stable par produit fini et par réunion filtrante croissante* (*resp., réunion filtrante croissante préservant* 0 *et* 1), *soit* $\mathcal{L}$ *un type de similarité, soit* $\mathcal{V}$ *une variété de* $\mathcal{L}$*-algèbres, soient* $\lambda < \kappa$ *des cardinaux infinis, soit* I *un arbre bien fondé, soit* J *une catégorie tel que :*

(1) $\mathcal{V}$ *est localement* $\leq \lambda$.
(2) $\operatorname{card} \operatorname{Mor}(J) < \kappa$.
(3) $\operatorname{card} I \leq \kappa$.
(4) $\operatorname{card}(\downarrow i) < \operatorname{cf} \kappa$ *pour tout* $i \in I$.
(5) *Tout diagramme de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*) $\mathcal{D}\colon J \to \mathcal{S}$ *tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(j) \leq \kappa$ *pour tout* $j \in \operatorname{Ob} J$, *a un relèvement dans* $\mathcal{V}$.

Alors tout foncteur $\mathcal{D}\colon I \times J \to \mathcal{S}$ *tel que* $\operatorname{card} \mathcal{D}(i, j) < \kappa$ *pour tout* $i \in I$ *et tout* $j \in \operatorname{Ob} J$, *a un relèvement dans* $\mathcal{V}$.

Démonstration. Par le Corollaire 3.2.7 il existe un recouvrement normé $(U, |\cdot|)$ de I étroit et κ-compatible tel que $\operatorname{card} U \leq \kappa$. Soit $\mathcal{D}\colon I \times J \to \mathcal{S}$ un diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis (resp., $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis) tel que $\operatorname{card} \mathcal{D}(i, j) < \kappa$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in \operatorname{Ob} J$. Ce foncteur correspond à un foncteur $\widetilde{\mathcal{D}}\colon J \to \mathcal{S}^I$. Mais :

$$\operatorname{card} \operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{D}}(j), U) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \operatorname{card} \prod_{u \in V} \mathcal{D}(|u|, j) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \kappa \leq \kappa,$$

pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$. De plus $\operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{D}}(-), U)$ est un diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis (resp., $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis) de $\mathcal{S}$. Donc $\operatorname{Cond}(\widetilde{\mathcal{D}}(-), U)$ a un relèvement $\mathcal{A}\colon J \to \mathcal{V}$, et, par le Lemme 3.5.7, $\mathcal{A}\colon J \to \mathcal{V}$ est un U-quasi-relèvement de $\widetilde{\mathcal{D}}$. De plus, par le Lemme 3.1.8, $\mathcal{V}$ est $(\operatorname{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)^{=}, J, (\kappa)_{\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id}_{\mathrm{e}}(U, |\cdot|)^{=}})$-Löwenheim-Skolem. Donc, par le Théorème 3.5.9, $\mathcal{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}$. □

Par récurrence nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.8. *Soit* $\mathcal{S}$ *une classe de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*) *stable par produit fini et par réunion filtrante croissante* (*resp., réunion filtrante croissante préservant* 0 *et* 1), *soit* $\mathcal{L}$ *un type de similarité, soit* $\mathcal{V}$ *une variété de* $\mathcal{L}$*-algèbres, soit* κ *un cardinal infini, soient* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *des arbres bien fondés, soit* J *une catégorie telle que :*

(1) $\mathcal{V}$ *est localement* $\leq \kappa$.
(2) $\operatorname{card} I_1 + \operatorname{card} I_2 + \cdots + \operatorname{card} I_{n-1} + \operatorname{card} \operatorname{Mor} J \leq \kappa$.
(3) $\operatorname{card} I_n \leq \kappa^+$.

(4) $\operatorname{card}{\downarrow}i \leq \kappa$ *pour tout* $i \in I_n$.

(5) *Tout diagramme de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*) $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}$, *tel que* $\operatorname{card}\mathcal{D}(j) \leq \kappa^{+n}$, *a un relèvement dans* $\mathcal{V}$.

Alors tout diagramme de $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*) $\mathcal{D}\colon I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times J \to \mathscr{S}$, *tel que* $\operatorname{card}\mathcal{D}(i_1, i_2, \ldots, i_n, j) \leq \kappa$ *pour tout* $(i_1, i_2, \ldots, i_n, j) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \times \operatorname{Ob} J$, *a un relèvement dans* $\mathcal{V}$.

Corollaire 3.6.9. *Soit* $\mathscr{S}$ *une classe de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*) *stable par produit fini et par réunion filtrante croissante* (*resp., réunion filtrante croissante préservant* 0 *et* 1), *soit* $\mathscr{L}$ *un type de similarité, soit* $\mathcal{V}$ *une variété de* $\mathscr{L}$*-algèbres. Si tout* $S \in \mathscr{S}$ *a un relèvement dans* $\mathcal{V}$, *alors tout diagramme de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis* (*resp.,* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis*), *indexé par un produit fini d'arbres bien fondés, a un relèvement dans* $\mathcal{V}$.

En utilisant le résultat de Lampe dans [**26**], prouvant que tout $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis est le $(\vee, 0)$-demi-treillis des congruences compactes d'un magma, nous obtenons la généralisation de son résultat de représentation simultanée dans [**27**], à tous les diagrammes de $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis, indexés par un ensemble ordonné fini.

Corollaire 3.6.10. *Soit* $\mathscr{S}$ *la catégorie de tous les* $(\vee, 0, 1)$*-demi-treillis avec* $(\vee, 0, 1)$*-homomorphisme, soit* I *un ensemble ordonné fini. Alors tout diagramme* $\mathcal{D}\colon I \to \mathscr{S}$ *a un relèvement dans la variété de tous les magmas.*

Démonstration. Notons $\mathcal{V}$ la variété de tous les magmas. Pour $I = 2^n$, avec un entier naturel non nul n, le résultat est une conséquence du Corollaire 3.6.9. Soit I un ensemble ordonné fini. Soit $\mathcal{D}\colon I \to \mathscr{S}$ un diagramme de $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis. Posons $S_X = \varinjlim(\mathcal{D}{\restriction}X) = \varinjlim_{i \in X} \mathcal{D}(i)$, pour tout $X \in \mathfrak{P}(I)$, (il est bien connu que tout diagramme de $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis et $(\vee, 0, 1)$-homomorphismes a une colimite). Soit $s_{X,Y}\colon S_X \to S_Y$ le morphisme canonique pour tous $X \subseteq Y \subseteq I$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'\colon \mathfrak{P}(I) &\to \mathscr{S} \\ X &\mapsto S_X, && \text{pour tout } X \in \mathfrak{P}(I) \\ (X \subseteq Y) &\mapsto s_{X,Y}, && \text{pour tous } X \subseteq Y \subseteq I \end{aligned}$$

est un foncteur. Comme $\mathfrak{P}(I) \cong 2^I$, il existe un relèvement $\mathcal{A}'\colon \mathfrak{P}(I) \to \mathcal{V}$ de $\mathcal{D}'$. De plus, comme $S_{I\downarrow i} = \mathcal{D}(i)$ et $s_{I\downarrow i, I\downarrow j} = \mathcal{D}(i \leq j)$ pour tous $i \leq j$ dans I, le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon I &\to \mathcal{V} \\ i &\mapsto \mathcal{A}'(I \downarrow i), && \text{pour tout } i \in I \\ (i \leq j) &\mapsto \mathcal{A}'(I \downarrow i \subseteq I \downarrow j), && \text{pour tous } i \leq j \in I \end{aligned}$$

est un relèvement de $\mathcal{D}$. □

Le résultat suivant est une propriété de compacité pour les relèvements de diagrammes.

THÉORÈME 3.6.11. *Soit $\mathscr{S}$ la classe de tous les $(\vee, 0)$-demi-treillis distributifs, soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives, soit J une petite catégorie, tel qu'il existe au plus un nombre fini de flèches entre deux objets quelconques, soit $\mathcal{D}\colon J \to \mathscr{S}$ un foncteur tel que $\mathcal{D}(j)$ est fini pour tout $j \in J$. Si tout sous-diagramme fini de $\mathcal{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(K_j)_{j\in J}$ une famille de parties finies de $\mathcal{V}$ telle que si $\operatorname{Con_c} A$ est isomorphe à $\mathcal{D}(j)$, pour un certain $A \in \mathcal{V}$ et un $j \in \operatorname{Ob} J$, alors A est isomorphe à un élément de K_j.

Pour toute partie finie I de $\operatorname{Ob} J$, notons $\overline{I}$ la sous-catégorie pleine de J dont la classe des objets est I. Soit $\mathcal{A}_I\colon \overline{I} \to \mathcal{V}$ un foncteur et soit $\xi_I = (\xi_I^i)_{i\in\operatorname{Ob} I}\colon \operatorname{Con_c} \circ\mathcal{A} \to \mathcal{D} \restriction I$ un isomorphisme naturel. Nous pouvons supposer $\mathcal{A}_I(i) \in K_i$ pour tout $i \in I$.

Posons $Q_S = \{P \in [\operatorname{Ob} J]^{<\omega} \mid S \subseteq P\}$ et notons $\mathfrak{F}$ le filtre sur $[\operatorname{Ob} J]^{<\omega}$ engendré par $\{Q_S \mid S \in [\operatorname{Ob} J]^{<\omega}\}$. Comme $Q_{S_1} \cap Q_{S_2} = Q_{S_1\cup S_2}$ pour tous $S_1, S_2 \in [\operatorname{Ob} J]^{<\omega}$, le filtre $\mathfrak{F}$ est propre, donc il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ tel que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$.

La notion de quasi-partition a déjà été vue au début de la Section 2.5. Soit $j \in \operatorname{Ob} J$. La famille $(\{P \in Q_{\{j\}} \mid \mathcal{A}_P(j) = A\})_{A\in K_j}$ est une quasi-partition finie de $Q_{\{j\}}$, donc il existe un unique $A_j \in K_j$ tel que $R_j = \{P \in Q_{\{j\}} \mid \mathcal{A}_P(j) = A_j\}$ appartient à $\mathfrak{U}$.

Soit $f\colon i \to j$ une flèche de J. La famille $(\{P \in R_i \cap R_j \mid \mathcal{A}_P(f) = s\})_{s\colon A_i\to A_j}$ est une quasi-partition finie de $R_i \cap R_j \in \mathfrak{U}$, donc il existe un unique $s_f\colon A_i \to A_j$ tel que $S_f = \{P \in R_i \cap R_j \mid \mathcal{A}_P(f) = s_f\}$ appartient à $\mathfrak{U}$.

Soit $i \in \operatorname{Ob} J$, soit $P \in S_{\mathrm{id}_i}$, alors $\mathcal{A}_P(i) = A_i$ et $\mathrm{id}_{A_i} = \mathrm{id}_{\mathcal{A}_P(i)} = \mathcal{A}_P(\mathrm{id}_i) = s_{\mathrm{id}_i}$. Soit $f\colon i \to j$ et $g\colon j \to k$ deux flèches de J, soit $P \in S_f \cap S_g \cap S_{g\circ f}$. Donc $\mathcal{A}_P(i) = A_i$, $\mathcal{A}_P(j) = A_j$, et $\mathcal{A}_P(k) = A_k$. De plus :

$$s_g \circ s_f = \mathcal{A}_P(g) \circ \mathcal{A}_P(f) = \mathcal{A}_P(f \circ g) = s_{g\circ f}.$$

Nous obtenons le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\colon J &\to \mathcal{V} \\ i &\mapsto A_i && \text{pour tout } i \in \operatorname{Ob} J \\ f &\mapsto s_f && \text{pour tout } f \in \operatorname{Mor} J \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \operatorname{Ob} J$, la famille $(\{P \in R_j \mid \xi_P^j = \phi\})_{\phi\colon \operatorname{Con_c}\mathcal{A}(j)\to\mathcal{D}(j)}$ est une quasi-partition finie de R_j, donc il existe un unique $\phi_j\colon \operatorname{Con_c} \mathcal{A}(j) \to \mathcal{D}(j)$ tel que l'ensemble $T_j = \{P \in R_j \mid \xi_P^j = \phi_j\}$ appartient à $\mathfrak{U}$.

Soit $f\colon i \to j$ une flèche de J, soit $P \in S_f \cap T_i \cap T_j$. Alors les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\phi_j \circ \operatorname{Con_c} \mathcal{A}(f) = \xi_P^j \circ \operatorname{Con_c} \mathcal{A}_P(f) = \mathcal{D}(f) \circ \xi_P^i = \mathcal{D}(f) \circ \phi_i,$$

et donc $(\phi_j)_{j\in\operatorname{Ob} J}\colon \operatorname{Con_c} \circ\mathcal{A} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme naturel. Donc $\mathcal{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}$. $\square$

Le corollaire suivant donne une caractérisation de tous les couples de variétés finiment engendrées d'algèbres congruence-distributives avec un point critique indénombrable.

Corollaire 3.6.12. *Soit $\mathcal{V}_1$ une variété localement finie de type de similarité dénombrable, soit $\mathcal{V}_2$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) > \aleph_0$.

(2) *Tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par un arbre qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$.*

(3) *Tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par une chaîne finie qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$.*

Démonstration. Si (1) est vraie, alors par le Corollaire 3.6.5 tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par un arbre fini qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$. Donc par le Théorème 3.6.11, l'assertion (2) est satisfaite.

Supposons maintenant (3). Par le Théorème 3.6.11, tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par ω qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$. Soit D un $(\vee,0)$-demi-treillis dénombrable distributif. Soit $A\in\mathcal{V}_1$ tel que $\operatorname{Con_c} A\cong D$. Par le Lemme 3.1.7 nous pouvons supposer que A est dénombrable. Donc nous pouvons écrire $A=\bigcup_{n\in\omega}A_n$, où A_n est une sous-algèbre finie de A et $A_m\subseteq A_n$ pour tous $m\leq n$ dans ω. Soit $f_{m,n}\colon A_m\to A_n$ le plongement canonique pour tous $m\leq n$ dans ω. Posons $\mathcal{A}=(A_n,f_{m,n})_{m\leq n\in\omega}$. Il existe donc un diagramme $\mathcal{B}=(B_n,g_{m,n})_{m\leq n\in\omega}$ et un isomorphisme naturel $\xi\colon \operatorname{Con_c}\circ\mathcal{A}\to\operatorname{Con_c}\circ\mathcal{B}$. Donc, comme le foncteur $\operatorname{Con_c}$ préserve les limites inductives filtrantes croissantes,

$$\operatorname{Con_c} A\cong\operatorname{Con_c}(\varinjlim\mathcal{A})\cong\varinjlim(\operatorname{Con_c}\circ\mathcal{A})\cong\varinjlim(\operatorname{Con_c}\circ\mathcal{B})\cong\operatorname{Con_c}(\varinjlim\mathcal{B}).\qquad\square$$

Le corollaire suivant donne une caractérisation des points critiques ∞ d'un couple de variétés finiment engendrées d'algèbres congruence-distributives.

Corollaire 3.6.13. *Soit $\mathcal{V}_1$ une variété localement finie, soit $\mathcal{V}_2$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)\geq\aleph_\omega$.

(2) *Tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par $\{0,1\}^n$, pour un entier naturel n, qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$.*

(3) *Tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par un $(\vee,0)$-demi-treillis fini, qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$.*

(4) *Tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par un $(\vee,0)$-demi-treillis, qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$.*

(5) *Tout diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis indexé par un $(\vee,0)$-demi-treillis, qui a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$.*

(6) $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)=\infty$, *c'est-à-dire* $\operatorname{Con_c}\mathcal{V}_1\subseteq\operatorname{Con_c}\mathcal{V}_2$.

Démonstration. Par le Corollaire 3.6.6, l'assertion (1) implique (2). Par le Théorème 3.6.11, l'assertion (3) implique (4). Les implications (5) $\Longrightarrow$ (6) et (6) $\Longrightarrow$ (1) sont évidentes.

Notons $\mathscr{S}$ la classe de tous les $(\vee,0)$-demi-treillis distributifs. Supposons maintenant que (2) est satisfaite. Soit L un $(\vee,0)$-demi-treillis fini, soit $\mathcal{D}$ un diagramme de $(\vee,0)$-demi-treillis finis indexé par L, soit $\mathcal{A}\colon L\to\mathcal{V}_1$ un relèvement de $\mathcal{D}$. Posons :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'\colon \mathfrak{P}(L)&\to\mathscr{S}\\ X&\mapsto\mathcal{D}(\bigvee X)\\ X\subseteq Y&\mapsto\mathcal{D}(\bigvee X\leq\bigvee Y).\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{D}'$ est un foncteur. De plus, le foncteur $\mathcal{A}'\colon\mathfrak{P}(L)\to\mathcal{V}_1$ défini par

$$\begin{aligned}X&\mapsto\mathcal{A}(\bigvee X)\\ X\subseteq Y&\mapsto\mathcal{A}(\bigvee X\leq\bigvee Y)\end{aligned}$$

est un relèvement de $\mathcal{D}'$. Donc, par (2), il existe un relèvement $\mathcal{B}'\colon\mathfrak{P}(L)\to\mathcal{V}_2$ de $\mathcal{D}'$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\colon L&\to\mathcal{V}_2\\ x&\mapsto\mathcal{B}'(L\downarrow x)&&\text{pour tout } x\in L\\ (x\leq y)&\mapsto\mathcal{B}'(L\downarrow x\subseteq L\downarrow y)&&\text{pour tous } x\leq y\in L\end{aligned}$$

est un relèvement de $\mathcal{D}$. Ce qui montre (3).

Supposons (4). Soit L un $(\vee,0)$-demi-treillis, soit $\mathcal{D}\colon L\to\mathscr{S}$ un foncteur, soit $\mathcal{A}\colon L\to\mathcal{V}_1$ un relèvement de $\mathcal{D}$. Fixons $a\in\mathcal{A}(0)$. Soit :

$$\begin{aligned}G=\{(Q_x)_{x\in L}\mid{}& Q_x \text{ est une sous-algèbre finie de } \mathcal{A}(x)\text{, pour tout } x\in L,\\ &\mathcal{A}(x\leq y)(Q_x)\subseteq Q_y\text{, pour tous } x\leq y\in L \text{ et } a\in Q_0,\}\end{aligned}$$

ordonné par $(Q_x)_{x\in L}\leq(Q'_x)_{x\in L}$ si $Q_x\subseteq Q'_x$ pour tout $x\in L$. La sous-algèbre

$$\langle\mathcal{A}(0\leq x)(a)\rangle_{\mathcal{A}(x)}\quad\text{de } \mathcal{A}(x) \text{ engendrée par } \mathcal{A}(0\leq x)(a)$$

est finiment engendrée, donc finie (car $\mathcal{V}_1$ est localement finie). Donc G est un $(\vee,0)$-demi-treillis avec comme plus petit élément $\left(\langle\mathcal{A}(0\leq x)(a)\rangle_{\mathcal{A}(x)}\right)_{x\in L}$.

Soit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'\colon G\times L&\to\mathcal{V}_1\\ (Q,x)&\mapsto Q_x\\ ((Q,x)\leq(Q',x'))&\mapsto(\mathcal{A}(x\leq x')\restriction Q_x\colon Q_x\to Q_y)\end{aligned}$$

Considérons $\widetilde{\mathcal{A}}'\colon L\to\mathcal{V}_1^G$ comme défini dans la Proposition 2.1.11. Alors :

$$\varinjlim\widetilde{\mathcal{A}}'(x)=\bigcup_{Q\in G}\mathcal{A}'(Q,x)=\mathcal{A}(x),\quad\text{pour tout } x\in L$$

$$\varinjlim\widetilde{\mathcal{A}}'(x\leq y)=\bigcup_{Q\in G}\mathcal{A}'((Q,x)\leq(Q,y))=\mathcal{A}(x\leq y),\quad\text{pour tous } x\leq y\in L$$

Comme $\mathrm{Con_c}\,\mathcal{A}'$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_1$, il a aussi un relèvement $\mathcal{B}'\colon G\times L$ dans $\mathcal{V}_2$. Soit

$$\mathcal{B}=\varinjlim\circ\widetilde{\mathcal{B}}'\colon L\to\mathcal{V}_2.$$

Comme $\mathrm{Con_c}$ préserve les limites inductives filtrantes croissantes, nous avons les isomorphismes naturels suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&\cong\mathrm{Con_c}\circ\mathcal{A}\\&\cong\mathrm{Con_c}\circ\varinjlim\circ\widetilde{\mathcal{A}}'\\&\cong\varinjlim\circ\mathrm{Con_c}\circ\widetilde{\mathcal{A}}'\\&\cong\varinjlim\circ\mathrm{Con_c}\circ\widetilde{\mathcal{B}}'\\&\cong\mathrm{Con_c}\circ\varinjlim\circ\widetilde{\mathcal{B}}'\\&\cong\mathrm{Con_c}\circ\mathcal{B}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.6.14. *Soit $\mathcal{V}_1$ une variété localement finie, soit $\mathcal{V}_2$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives. Alors exactement une des assertions suivantes est satisfaite :*

(1) $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)$ *est fini.*

(2) $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)=\aleph_n$, *pour un entier naturel n.*

(3) $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)=\infty$, *c'est-à-dire* $\mathrm{Con_c}\,\mathcal{V}_1\subseteq\mathrm{Con_c}\,\mathcal{V}_2$.

Lemme 3.6.15. *Soit I un ensemble ordonné initialement fini, soit $(U,|\cdot|)$ un recouvrement normé $\aleph_0$-compatible de I tel que* $\mathrm{card}\,U=\kappa\geq\aleph_0$ *et* $\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)$ *est initialement fini. Soit $\mathcal{V}_1$ une variété d'algèbres localement $\leq\kappa$, soit $\mathcal{V}_2$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives telle que* $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)>\kappa$. *Soit $\vec{D}\colon I\to\mathscr{S}$ un diagramme de* $(\vee,0)$-*demi-treillis finis. Si $\vec{D}$ est relevable dans $\mathcal{V}_1$, alors $\vec{D}$ est relevable dans $\mathcal{V}_2$.*

Démonstration. Soit J l'ensemble ordonné à un élément. Par le Lemme 3.1.10, la variété $\mathcal{V}_2$ est $(\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=,J,\kappa)$-Löwenheim-Skolem.

Soit $\vec{A}=(A_i,f_{i,j})_{i\leq j\text{ dans }I}$ un relèvement de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}_1$. Comme $\mathrm{Con_c}\,A_i$ est fini, quitte à remplacer A_i par un sous-treillis et en utilisant le Lemme 3.1.7, nous pouvons supposer que $\mathrm{card}\,A_i\leq\kappa$ pour tout $i\in I$. Du Lemme 3.5.7 découle l'existence d'un U-quasi-relèvement $(\tau,\mathrm{Cond}(\vec{A},U))$ de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}_1$. De plus :

$$\mathrm{card}\,\mathrm{Cond}(\vec{A},U)\leq\sum_{V\in[U]^{<\omega}}\mathrm{card}\left(\prod_{u\in V}A_{|u|}\right)\leq\sum_{V\in[U]^{<\omega}}\kappa\leq\kappa$$

Comme $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2)>\kappa$, il existe $B\in\mathcal{V}_2$ et un isomorphisme :

$$\xi\colon\ \mathrm{Con_c}\,\mathrm{Cond}(\vec{A},U)\to\mathrm{Con_c}\,B.$$

Donc $(\tau\circ\xi,B)$ est un U-quasi-relèvement de $\vec{D}$ (cf. Lemme 3.5.6). Par ailleurs nous savons que $\mathcal{V}_2$ est $(\mathrm{Id_e}(U,|\cdot|)^=,J,\aleph_0)$-Löwenheim-Skolem, en conséquence, par le Théorème 3.5.9, il existe un relèvement de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}_2$. □

De manière analogue nous obtenons le résultat similaire avec des variétés d'algèbres quelconques.

LEMME 3.6.16. *Soient* $\aleph_0 < \lambda < \kappa$ *des cardinaux réguliers. Soit* I *un ensemble ordonné tel que* $\operatorname{card}(I \downarrow i) < \lambda$ *pour tout* $i \in I$. *Soit* $(U, |\cdot|)$ *un recouvrement normé* λ*-compatible de* I *tel que* $\operatorname{card}(\operatorname{Id_e}(U, |\cdot|) \downarrow \boldsymbol{u}) < \kappa$ *pour tout* $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Id_e}(U, |\cdot|)^=$, *et* $\operatorname{card} U \leq \kappa$. *Soit* $\mathcal{V}_1$ *une variété d'algèbres localement* $\leq \kappa$. *Soit* $\mathcal{V}_2$ *une variété d'algèbres localement* $\leq \lambda$. *Soit* $\vec{D} = (D_P, \varphi_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I}$ *un système inductif de* $(\vee, 0)$*-demi-treillis. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(1) $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \kappa$.

(2) $\operatorname{card}(D_P) < \lambda$ *pour tout* $P \in I^=$.

(3) $\operatorname{card}(D_i) \leq \kappa$ *pour tout élément* $i \in I$ *maximal.*

(4) $\vec{D}$ *est relevable dans* $\mathcal{V}_1$.

Alors $\vec{D}$ *est relevable dans* $\mathcal{V}_2$.

DÉMONSTRATION. Soit J l'ensemble ordonné à un élément. Par le Lemme 3.1.8, la variété $\mathcal{V}_2$ est $(\operatorname{Id_e}(U, |\cdot|)^=, J, \aleph_0)$-Löwenheim-Skolem.

Soit $\vec{A} = (A_i, f_{i,j})_{i \leq j \text{ dans } I}$ un relèvement de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}_1$. Comme $\operatorname{card}(\operatorname{Con_c} A_i) \leq \kappa$, quitte à remplacer A_i par un sous-treillis et en utilisant le Lemme 3.1.7, nous pouvons supposer que $\operatorname{card} A_i \leq \kappa$ pour tout $i \in I$. Le Lemme 3.5.7 implique l'existence d'un U-quasi-relèvement $(\tau, \operatorname{Cond}(\vec{A}, U))$ de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}_1$. En plus :

$$\operatorname{card} \operatorname{Cond}(\vec{A}, U) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \operatorname{card}\left(\prod_{u \in V} A_{|u|}\right) \leq \sum_{V \in [U]^{<\omega}} \kappa \leq \kappa$$

Comme $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \kappa$, il existe $B \in \mathcal{V}_2$ et un isomorphisme :

$$\xi \colon \operatorname{Con_c} \operatorname{Cond}(\vec{A}, U) \to \operatorname{Con_c} B.$$

Donc $(\tau \circ \xi, B)$ est un U-quasi-relèvement de $\vec{D}$ (cf. Lemme 3.5.6). Nous savons par ailleurs que $\mathcal{V}_2$ est $(\operatorname{Id_e}(U, |\cdot|)^=, J, \aleph_0)$-Löwenheim-Skolem, en conséquence, par le Théorème 3.5.9, il existe un relèvement de $\vec{D}$ dans $\mathcal{V}_2$. □

CHAPITRE 4

Calcul effectif de points critiques

Grâce aux outils introduits nous pouvons maintenant calculer des points critiques entre diverses variétés de treillis.

4.1. Un couple de variétés avec un point critique $\aleph_1$

Dans cette section nous construirons deux variétés finiment engendrées de treillis modulaires ayant un point critique $\aleph_1$, résolvant ainsi une question de Tůma et Wehrung posée dans [**37**, Problem 5]. La même construction est exposée dans [**11**].

LEMME 4.1.1. *Soit A une algèbre finie avec* $\operatorname{Con} A$ *distributif, soit $\alpha \in \operatorname{Con} A$ et posons $Q = \{\theta \in \mathrm{M}(\operatorname{Con} A) \mid \alpha \not\leq \theta\}$. Si tous les A/θ pour $\theta \in Q$ sont simples, alors l'application canonique* $\operatorname{Con} A \to \operatorname{Con}(A/\alpha) \times \prod_{\theta\in Q} \operatorname{Con}(A/\theta)$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Comme $\operatorname{Con}(A/\xi) \cong {\uparrow}\xi$ pour tout $\xi \in \operatorname{Con} A$, il suffit de prouver que l'application $j\colon \operatorname{Con} A \to ({\uparrow}\alpha)\times\prod_{\theta\in Q}({\uparrow}\theta)$, $\xi \mapsto (\xi\vee\alpha, (\xi\vee\theta)_{\theta\in Q})$ est un isomorphisme. Si $\alpha \wedge \bigwedge Q \neq 0$, alors il existe $\theta \in \mathrm{M}(\operatorname{Con} A)$ telle que $\alpha \wedge \bigwedge Q \not\leq \theta$, alors $\alpha \not\leq \theta$ (donc $\theta \in Q$) et $\bigwedge Q \not\leq \theta$, une contradiction ; d'où $\alpha\wedge\bigwedge Q = 0$. La distributivité de $\operatorname{Con} A$ montre que j est injectif.

Montrons maintenant que j est surjectif. Soit $\beta \in {\uparrow}\alpha$, soit $\gamma_\theta \in {\uparrow}\theta$ pour tout $\theta \in Q$. Posons $\xi = \beta \wedge \bigwedge_{\theta\in Q} \gamma_\theta$. Nous avons $\alpha \vee \beta = \beta$ et $\alpha \vee \theta = A \times A$ pour tout $\theta \in Q$, donc :

$$\xi \vee \alpha = (\beta \wedge \bigwedge_{\theta\in Q} \gamma_\theta) \vee \alpha = (\beta \vee \alpha) \wedge \bigwedge_{\theta\in Q} (\gamma_\theta \vee \alpha) = \beta \wedge \bigwedge_{\theta\in Q} (A \times A) = \beta$$

Nous obtenons de manière analogue $\xi \vee \theta = \gamma_\theta$ pour tout $\theta \in Q$, ce qui prouve que j est surjectif. □

Nous disons qu'une classe $\mathcal{V}$ d'algèbres de même type de similarité est *finiment semi-simple*, si tout membre fini sous-directement-irréductible de $\mathcal{V}$ est simple. Un exemple important de variété finiment semi-simple est la variété de tous les treillis modulaires.

LEMME 4.1.2. *Soient $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ des variétés d'algèbres congruence-distributives de même type de similarité, avec $\mathcal{V}_1$ finiment semi-simple. Nous supposons de plus que pour toute algèbre finie non simple $A \in \mathcal{V}_1$, si A se plonge dans une algèbre simple de $\mathcal{V}_1$, alors A se plonge dans une algèbre simple de $\mathcal{V}_2$.*

Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme entre des algèbres finies de $\mathcal{V}_1$. Notons α (resp., α') la plus petite congruence de A (resp., A') tel que $A/\alpha \in \mathcal{V}_2$ (resp., $A'/\alpha' \in \mathcal{V}_2$), avec les projections canoniques $\pi_\alpha\colon A \twoheadrightarrow A/\alpha$ (resp., $\pi'_{\alpha'}\colon A' \twoheadrightarrow A'/\alpha'$). Soit $B \in \mathcal{V}_2$, soit $p\colon B \twoheadrightarrow A/\alpha$ un morphisme surjectif, et soit $\xi\colon$ $\operatorname{Con_c} A \to \operatorname{Con_c} B$ un isomorphisme tel que $(\operatorname{Con_c} p) \circ$

$\xi = \operatorname{Con_c} \pi_\alpha$. *Alors il existe* $B' \in \mathcal{V}_2$*, un morphisme* $g\colon B \to B'$*, un morphisme surjectif* $p'\colon B' \twoheadrightarrow A'/\alpha'$ *et un isomorphisme* $\xi'\colon \operatorname{Con_c} A' \to \operatorname{Con_c} B'$*, tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Con_c} A \arrow[r, "\operatorname{Con_c} f"] \arrow[dl, "\operatorname{Con_c} \pi_\alpha"'] \arrow[dd, "\cong"', "\xi"] & \operatorname{Con_c} A' \arrow[dr, "\operatorname{Con_c} \pi'_{\alpha'}"] \arrow[dd, "\cong"', "\xi'"] & \\
\operatorname{Con_c}(A/\alpha) & & & \operatorname{Con_c}(A'/\alpha') \\
 & \operatorname{Con_c} B \arrow[r, "\operatorname{Con_c} g"] \arrow[ul, two heads, "\operatorname{Con_c} p"] & \operatorname{Con_c} B' \arrow[ur, two heads, "\operatorname{Con_c} p'"'] &
\end{tikzcd}$$

S'il existe au moins une algèbre simple dans $\mathcal{V}_2$*, alors* $\operatorname{Con_c} \circ \mathcal{A}$ *a un relèvement dans* $\mathcal{V}_2$*, pour tout diagramme* $\mathcal{A}\colon \omega \to \mathcal{V}_1$ *d'algèbres finies,*

De plus, si $\mathcal{V}_1$ *est localement fini, alors* $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) \geq \aleph_1$*.*

Démonstration. Notons $\pi_\theta\colon A \twoheadrightarrow A/\theta$ (resp., $\pi'_\theta\colon A' \twoheadrightarrow A'/\theta$) la projection canonique pour tout $\theta \in \operatorname{Con} A$ (resp., $\theta \in \operatorname{Con} A'$). L'algèbre $A/f^{-1}(\alpha')$ est isomorphe à une sous-algèbre de $A'/\alpha' \in \mathcal{V}_2$, donc $A/f^{-1}(\alpha') \in \mathcal{V}_2$, d'où $f^{-1}(\alpha') \supseteq \alpha$, donc $\operatorname{Con_c}(f)(\alpha) \subseteq \alpha'$, par suite le morphisme $g_\alpha\colon A/\alpha \to A'/\alpha'$, $x/\alpha \mapsto f(x)/\alpha'$ est bien défini et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & A' \\
{\scriptstyle \pi_\alpha}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \pi'_{\alpha'}}\Big\downarrow \\
A/\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & A'/\alpha'
\end{array}$$

Posons $h_\alpha = g_\alpha \circ p$.

Posons $Q = \{\theta \in \mathrm{M}(\operatorname{Con} A') \mid A'/\theta \notin \mathcal{V}_2\}$. Soit $\theta \in Q$. L'algèbre $A/f^{-1}(\theta)$ est isomorphe à une sous-algèbre de A'/θ qui est une algèbre simple de $\mathcal{V}_1$. Si $A/f^{-1}(\theta)$ n'est pas simple, alors $A/f^{-1}(\theta) \in \mathcal{V}_2$ et $A/f^{-1}(\theta)$ est une sous-algèbre d'une algèbre simple de $\mathcal{V}_2$. Donc l'une des deux assertions suivantes est satisfaite :

(1) L'algèbre $A/f^{-1}(\theta)$ est une sous-algèbre d'une algèbre simple dans $\mathcal{V}_2$.

(2) L'algèbre $A/f^{-1}(\theta)$ est simple et n'est pas dans $\mathcal{V}_2$.

Si $A/f^{-1}(\theta) \notin \mathcal{V}_2$, posons $B_\theta = B/\xi(f^{-1}(\theta))$, qui est une algèbre simple et posons $h_\theta\colon B \twoheadrightarrow B_\theta$ la projection canonique. Si $A/f^{-1}(\theta) \in \mathcal{V}_2$, alors il existe une algèbre simple $B_\theta \in \mathcal{V}_2$ et un plongement $g_\theta = A/f^{-1}(\theta) \hookrightarrow B_\theta$. De plus, comme $A/f^{-1}(\theta) \in \mathcal{V}_2$, l'inclusion $f^{-1}(\theta) \supseteq \alpha$ est vraie. Notons $p_\theta\colon A/\alpha \to A/f^{-1}(\theta)$ la projection canonique. Posons $h_\theta = g_\theta \circ p_\theta \circ p$.

Soit $\phi_\theta\colon \operatorname{Con_c}(A'/\theta) \to \operatorname{Con_c} B_\theta$ le seul isomorphisme possible, posons $\xi'_\theta = \phi_\theta \circ \operatorname{Con_c} \pi'_\theta$, pour tout $\theta \in Q$. Soit $\xi'_{\alpha'} = \operatorname{Con_c} \pi'_{\alpha'}$.

L'algèbre $B' = A'/\alpha' \times \prod_{\theta \in Q} B_\theta$ appartient à $\mathcal{V}_2$. Considérons

$$\begin{aligned}
g\colon B &\to B' \\
x &\mapsto (h_\alpha(x), (h_\theta(x))_{\theta \in Q}).
\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Con} B' \cong \operatorname{Con}(A'/\alpha') \times \prod_{\theta\in Q} \operatorname{Con}(B_\theta)$ est fini, toute congruence de B' est compacte, donc $\operatorname{Con_c} B' = \operatorname{Con} B'$. Nous pouvons donc définir l'application

$$\begin{aligned}\xi' \colon \operatorname{Con_c} A' &\to \operatorname{Con_c} B' \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \xi'_{\alpha'}(\boldsymbol{x}) \times \prod_{\theta\in Q} \xi'_\theta(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

Par le Lemme 4.1.1, l'application canonique :

$$\psi\colon \operatorname{Con_c} A' \to \operatorname{Con_c}(A'/\alpha') \times \prod_{\theta\in Q} \operatorname{Con_c}(A'/\theta) \quad \text{est un isomorphisme.}$$

l'application $\mathrm{id}_{\operatorname{Con_c}(A'/\alpha')} \times \prod_{\theta\in Q} \phi_\theta$ est aussi un isomorphisme, donc l'application $\xi' = (\mathrm{id}_{\operatorname{Con_c}(A'/\alpha')} \times \prod_{\theta\in Q} \phi_\theta) \circ \psi$ est un isomorphisme.

Notons par $p'\colon B' \twoheadrightarrow A'/\alpha'$ et par $p'_\theta\colon B' \to B_\theta$ les projections canoniques, pour tout $\theta \in Q$.

L'égalité $(\operatorname{Con_c} p') \circ \xi' = \xi'_{\alpha'}$ est évidente. De plus $p' \circ g = g_\alpha \circ p$, donc l'égalité suivante est satisfaite :

$$(\operatorname{Con_c} p') \circ (\operatorname{Con_c} g) \circ \xi = (\operatorname{Con_c} g_\alpha) \circ (\operatorname{Con_c} p) \circ \xi = (\operatorname{Con_c} g_\alpha) \circ \operatorname{Con_c} \pi_\alpha. \tag{4.1.1}$$

Comme $g_\alpha \circ \pi_\alpha = \pi'_{\alpha'} \circ f$ nous obtenons

$$(\operatorname{Con_c} p') \circ (\operatorname{Con_c} g) \circ \xi = (\operatorname{Con_c} \pi'_{\alpha'}) \circ \operatorname{Con_c} f = (\operatorname{Con_c} p') \circ \xi' \circ \operatorname{Con_c} f.$$

Soit $\theta \in Q$, alors les égalités suivantes sont vérifiées :

$$(\operatorname{Con_c} p'_\theta) \circ \xi' \circ (\operatorname{Con_c} f) = \xi'_\theta \circ (\operatorname{Con_c} f) = \phi_\theta \circ (\operatorname{Con_c} \pi'_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} f).$$

Supposons que $A/f^{-1}(\theta) \notin \mathcal{V}_2$. Soit $\beta \in \operatorname{Con_c} A$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}((\operatorname{Con_c} p'_\theta) \circ \xi' \circ (\operatorname{Con_c} f))(\beta) = 0 &\iff \operatorname{Con_c}(\pi'_\theta \circ f)(\beta) = 0 \\ &\iff \beta \subseteq f^{-1}(\theta) \\ &\iff \xi(\beta) \subseteq \xi(f^{-1}(\theta)) \\ &\iff (\operatorname{Con_c} h_\theta)(\xi(\beta)) = 0 \\ &\iff ((\operatorname{Con_c} p'_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} g) \circ \xi)(\beta) = 0.\end{aligned}$$

en conséquence, comme B_θ est simple, nous obtenons

$$\begin{aligned}&(\operatorname{Con_c} p'_\theta) \circ \xi' \circ (\operatorname{Con_c} f) = (\operatorname{Con_c} p'_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} g) \circ \xi, \\ &\text{pour tout } \theta \in Q \text{ telle que } A/f^{-1}(\theta) \notin \mathcal{V}_2.\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Supposons que $A/f^{-1}(\theta) \in \mathcal{V}_2$. les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}(\operatorname{Con_c} p'_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} g) \circ \xi &= (\operatorname{Con_c} h_\theta) \circ \xi \\ &= (\operatorname{Con_c} g_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} p_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} p) \circ \xi \\ &= (\operatorname{Con_c} g_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} p_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} \pi_\alpha) \\ &= (\operatorname{Con_c} g_\theta) \circ (\operatorname{Con_c} \pi_{f^{-1}(\theta)}).\end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathrm{Con_c}\, A$, les équivalences suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Con_c} p'_\theta) \circ (\mathrm{Con_c}\, g) \circ \xi(\beta) = 0 \\
&\iff (\mathrm{Con_c}\, g_\theta) \circ (\mathrm{Con_c}\, \pi_{f^{-1}(\theta)})(\beta) = 0 \\
&\iff (\mathrm{Con_c}\, \pi_{f^{-1}(\theta)})(\beta) = 0 && \text{comme } g_\theta \text{ est injective} \\
&\iff \beta \subseteq f^{-1}(\theta) \\
&\iff \mathrm{Con_c}(\pi'_\theta \circ f)(\beta) = 0 \\
&\iff (\mathrm{Con_c}\, p'_\theta) \circ \xi' \circ (\mathrm{Con_c}\, f)(\beta) = 0.
\end{aligned}$$

En conséquence, comme B_θ est simple,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Con_c}\, p'_\theta) \circ \xi' \circ (\mathrm{Con_c}\, f) = (\mathrm{Con_c}\, p'_\theta) \circ (\mathrm{Con_c}\, g) \circ \xi, \\
&\text{pour tout } \theta \in Q \text{ telle que } A/f^{-1}(\theta) \in \mathcal{V}_2.
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Comme $\mathrm{Con_c}\, B' \hookrightarrow \mathrm{Con_c}(A/\alpha') \times \prod_{\theta \in Q} \mathrm{Con_c}\, B_\theta$, par (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Con_c}\, A & \xrightarrow{\mathrm{Con_c}\, f} & \mathrm{Con_c}\, A' \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \xi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi'} \\
\mathrm{Con_c}\, B & \xrightarrow{\mathrm{Con_c}\, g} & \mathrm{Con_c}\, B'
\end{array}$$

Soit S une algèbre simple de $\mathcal{V}_2$, soit $\mathcal{A}\colon \omega \to \mathcal{V}_1$ un diagramme d'algèbres finies, soit α_n la plus petite congruence de $\mathcal{A}(n)$ telle que $\mathcal{A}(n)/\alpha_n \in \mathcal{V}_2$, soit $\pi^n_\theta\colon \mathcal{A}(n) \twoheadrightarrow \mathcal{A}(n)/\theta$ la projection canonique pour tout $\theta \in \mathrm{Con}\, \mathcal{A}(n)$. Soit $Q_n = \{\theta \in \mathrm{M}(\mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(n)) \mid \mathcal{A}(n)/\theta \notin \mathcal{V}_2\}$, pour tout $n \in \omega$. Soit $\phi_\theta\colon \mathrm{Con_c}(\mathcal{A}(0)/\theta) \to S$ le seul isomorphisme possible. Soit $\xi_{\alpha_0} = \mathrm{Con_c}\, \pi^0_{\alpha_0}$, soit $\xi_\theta = \phi_\theta \circ \mathrm{Con_c}\, \pi^0_\theta$, pour tout $\theta \in Q_0$. Posons $B_0 = (\mathcal{A}(0)/\alpha_0) \times S^{Q_0}$, soit $p_0\colon B_0 \twoheadrightarrow \mathcal{A}(0)/\alpha_0$ la projection canonique. Par le Lemme 4.1.1, le morphisme

$$\begin{aligned}
\xi_0\colon\ \mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(0) &\to \mathrm{Con_c}\, B_0 \\
\boldsymbol{x} &\mapsto \xi_{\alpha_0}(\boldsymbol{x}) \times \prod_{\theta \in Q_0} \xi_\theta(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

est un isomorphisme, de plus $(\mathrm{Con_c}\, p_0) \circ \xi_0 = \xi_{\alpha_0} = \mathrm{Con_c}\, \pi^0_{\alpha_0}$. Nous construisons, en appliquant par induction la première partie du lemme, une famille $(B_n)_{n\in\omega}$ d'algèbres de $\mathcal{V}_2$, une famille $(g_n\colon B_n \to B_{n+1})_{n\in\omega}$ de morphismes et une famille $(\xi_n\colon \mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(n) \to B_n)_{n\in\omega}$ d'isomorphismes tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tout n :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(n) & \xrightarrow{\mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(n \leq n+1)} & \mathrm{Con_c}\, \mathcal{A}(n+1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \xi_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_{n+1}} \\
\mathrm{Con_c}\, B_n & \xrightarrow[\mathrm{Con_c}\, g_n]{} & \mathrm{Con_c}\, B_{n+1}
\end{array} \tag{4.1.4}$$

Ce qui nous donne un foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\colon \omega &\to \mathcal{V}_2 \\ n &\mapsto B_n \\ (n \leq m) &\mapsto g_{m-1} \circ g_{m-2} \circ \cdots \circ g_n \end{aligned}$$

qui relève $\mathrm{Con_c} \circ \mathcal{A}$ dans $\mathcal{V}_2$.

Supposons maintenant que $\mathcal{V}_1$ est localement finie. Soit $A \in \mathcal{V}_1$ telle que $\mathrm{Con_c}\, A$ est dénombrable, alors, quitte à remplacer A par l'un de ses sous-treillis, nous pouvons supposer que A est dénombrable (cf. Lemme 3.1.7) et est la limite inductive filtrante croissante d'un diagramme $\mathcal{A}\colon \omega \to \mathcal{V}_1$ d'algèbres finies. Alors $\mathrm{Con_c} \circ \mathcal{A}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$, donc, comme $\mathrm{Con_c}$ préserve les limites inductives filtrantes croissantes, $\mathrm{Con_c}\, A$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$. Donc $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \aleph_0$. □

COROLLAIRE 4.1.3. *Soit $\mathcal{V}_1$ la variété engendrée par T_1, soit $\mathcal{V}_2$ la variété engendrée par T_2, T_3 et T_4, où T_1, T_2, T_3 et T_4 sont les treillis de la Figure* 4.1. *Alors* $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \aleph_1$. *Ce résultat est aussi vraie pour les variétés de treillis bornés correspondantes* (*resp., treillis avec zéro*).

Observons que les variétés $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont autoduales.

DÉMONSTRATION. Le treillis T_1 est engendré par a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 qui sont tous doublement irréductibles. Il s'ensuit que les sous-treillis maximaux de T_1 sont les $T_1 - \{a_k\}$, pour tout $1 \leq k \leq 6$. Mais tous ces treillis sont isomorphes à T_2, T_3 ou T_4, les hypothèses du Lemme 4.1.2 sont donc satisfaites donc $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) \geq \aleph_1$.

Posons $D_0 = 2^4$, $D_1 = D_2 = 2^2$, $D_3 = 2$. Posons :

$$\begin{aligned} \phi_1\colon D_0 &\to D_1 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &\mapsto (\alpha \vee \beta, \gamma \vee \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2\colon D_0 &\to D_2 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &\mapsto (\alpha \vee \delta, \beta \vee \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi\colon 2^2 &\to D_3 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \vee \beta \end{aligned}$$

Soit $\overrightarrow{D}$ le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & D_3 & \\ D_1 \arrow[ur, "\psi"] & & D_2 \arrow[ul, "\psi"'] \\ & D_0 \arrow[ul, "\phi_1"] \arrow[ur, "\phi_2"'] & \end{tikzcd}$$

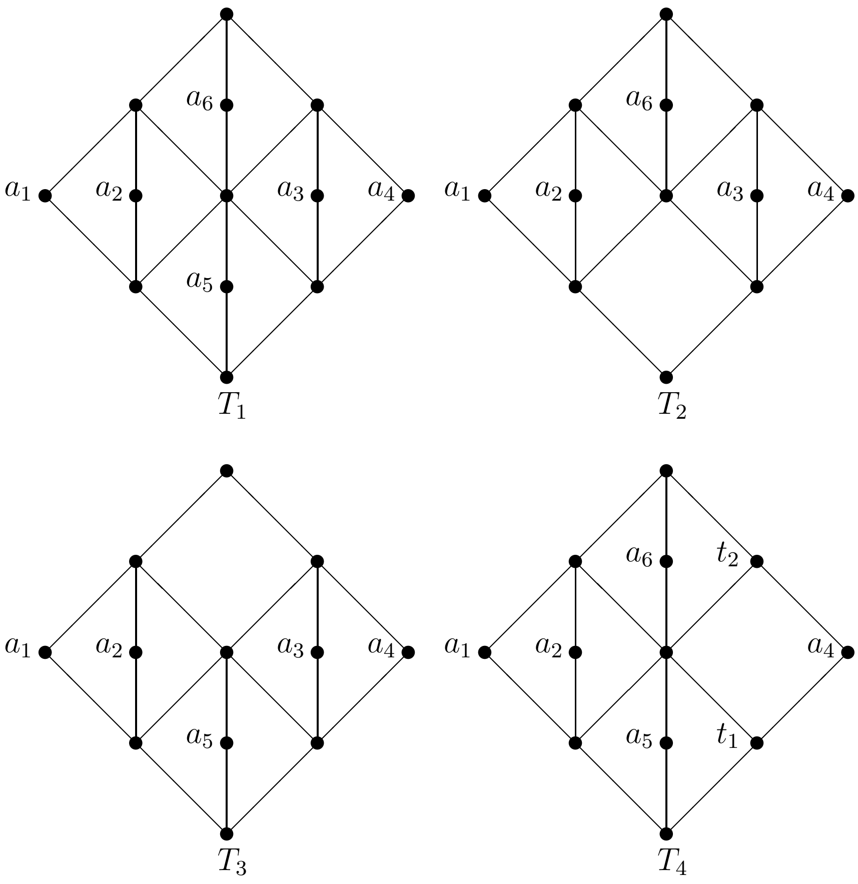

FIGURE 4.1. Les treillis T_1, T_2, T_3 et T_4.

Posons $S_1 = T_1 - \{a_2, a_3\}$ et $S_2 = T_1 - \{a_5, a_6\}$. Alors S_1 et S_2 sont des sous-treillis de T_1 ; posons $S_0 = S_1 \cap S_2$. Soient $i_1 \colon S_0 \to S_1$, $i_2 \colon S_0 \to S_2$, $j_1 \colon S_1 \to T_1$, $j_2 \colon S_2 \to T_1$ les injections canoniques. Alors le diagramme suivant est un relèvement de $\overrightarrow{D}$ dans $\mathcal{V}_1$.

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 & \\
S_1 \arrow[ur, "j_1"] & & S_2 \arrow[ul, "j_2"'] \\
 & S_0 \arrow[ul, "i_1"] \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

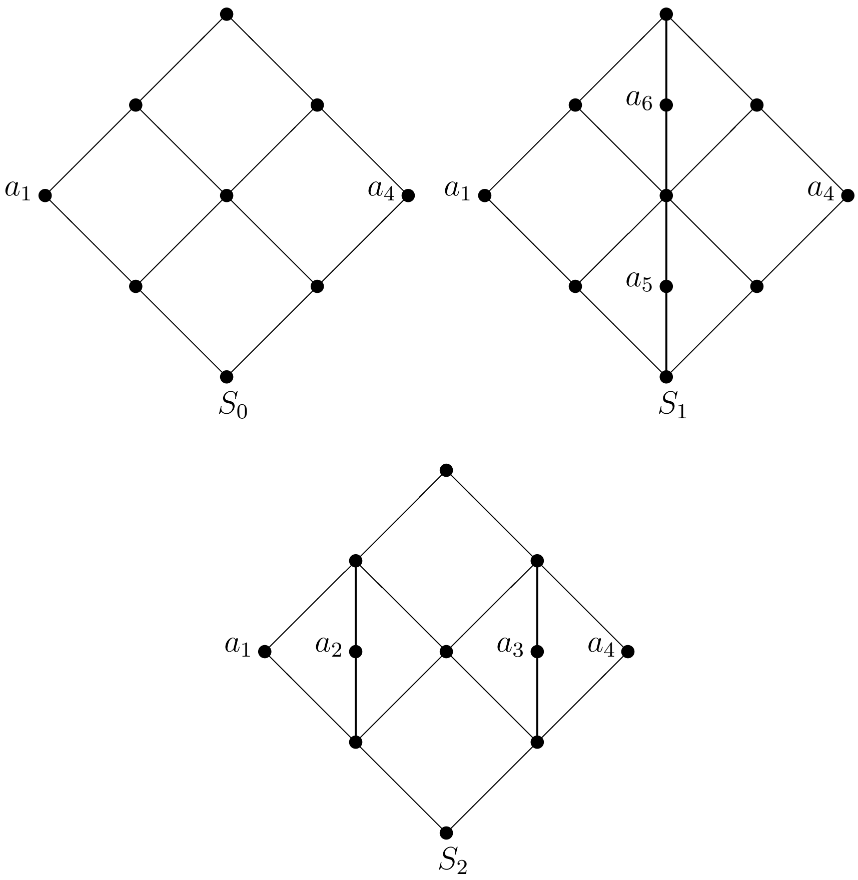

FIGURE 4.2. Les treillis S_0, S_1 et S_2.

Supposons que $\overrightarrow{D}$ a un relèvement dans $\mathcal{V}_2$:

$$\begin{tikzcd} & B_3 & \\ B_1 \arrow[ur, "g_1"] & & B_2 \arrow[ul, "g_2"'] \\ & B_0 \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

soit $(\xi_k\colon D_k \to \operatorname{Con} B_k)_{0\leq k\leq 3}$ l'isomorphisme de diagrammes correspondant. Les morphismes de $(\vee, 0)$-demi-treillis ϕ_1, ϕ_2 et ψ séparent 0, donc f_1, f_2, g_1 et g_2 sont injectives, nous pouvons donc supposer que ce sont des morphismes d'inclusion de sous-treillis. Un calcul rapide prouve que $T_2, T_3, T_4, T_4 - \{a_4\}, M_{3,3}, M_3$ et 2 sont à isomorphisme près les seuls treillis simples de $\mathcal{V}_2$. Quitte à prendre un treillis plus grand nous pouvons supposer que $B_3 \in \{T_2, T_3, T_4\}$. Nous pouvons aussi supposer que B_1 et B_2 sont maximaux pour l'inclusion parmi les sous-treillis de B_3 en respectant la propriété d'avoir un treillis de congruences isomorphe à 2^2 $(*)$. C'est à dire qu'il n'existe pas de sous-treillis B' de B_3 avec $B_1 \subsetneq B'$ et B' est une extension préservant les congruences de B_1. Nous demandons une propriété semblable avec B_2.

Soit $h\colon B_0 \to B_1 \cap B_2$, $k_1\colon B_1 \cap B_2 \to B_1$ et $k_2\colon B_1 \cap B_2 \to B_2$ les morphismes d'inclusion. Soit $\theta_1 = \xi_0(1,0,0,0)$, $\theta_2 = \xi_0(0,1,0,0)$, $\theta_3 = \xi_0(0,0,1,0)$ et $\theta_4 = \xi_0(0,0,0,1)$. Alors les égalités suivantes sont vraies :

$$(\operatorname{Con} f_1)(\theta_1) = (\operatorname{Con} f_1)(\xi_0(1,0,0,0)) = \xi_1(\phi_1(1,0,0,0)) = \xi_1(1,0).$$

De même, $(\operatorname{Con} f_1)(\theta_3) = (\operatorname{Con} f_1)(\theta_4) = \xi_1(0,1)$, donc :

$$(\operatorname{Con} f_1)(\theta_1) \not\leq (\operatorname{Con} f_1)(\theta_3) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Con} f_1)(\theta_1) \not\leq (\operatorname{Con} f_1)(\theta_4),$$

mais $f_1 = k_1 \circ h$, donc $(\operatorname{Con} h)(\theta_1) \not\leq (\operatorname{Con} h)(\theta_3)$ et $(\operatorname{Con} h)(\theta_1) \not\leq (\operatorname{Con} h)(\theta_4)$. De plus $(\operatorname{Con} f_2)(\theta_1) = \xi_1(1,0)$ et $(\operatorname{Con} f_2)(\theta_2) = \xi_1(0,1)$, donc $(\operatorname{Con} h)(\theta_1) \not\leq (\operatorname{Con} h)(\theta_2)$. De manière analogue, $(\operatorname{Con} h)(\theta_i) \not\leq (\operatorname{Con} h)(\theta_j)$, pour tous $i \neq j$ dans $\{1,2,3,4\}$ et donc $\operatorname{Con}(B_1 \cap B_2)$ a une antichaîne à 4-éléments. Comme $B_1 \cap B_2$ est un treillis modulaire de longueur 4, $\operatorname{Con}(B_1 \cap B_2) \cong 2^4$.

Les égalités $(\operatorname{Con} f_1)(\xi_0(0,0,1,1)) = \xi_1(\phi_1((0,0,1,1))) = \xi_1(0,1)$ sont vraies, donc f_1 induit un plongement de $B_0/\xi_0(0,0,1,1)$ dans $B_1/\xi_1(0,1)$, mais $\operatorname{Con}(B_0/\xi_0(0,0,1,1)) \cong 2^2$, donc $B_1/\xi_1(0,1)$ est un treillis de longueur au moins 2. Nous prouvons de manière analogue que $B_1/\xi_1(1,0)$ est un treillis de longueur au moins 2. Donc tous les quotients sous-directement irréductible de B_1 sont de longueur au moins 2. La même propriété est vraie pour B_2. Donc B_1 et B_2 n'ont pas de quotient isomorphe à 2 $(**)$.

Supposons que $B_3 = T_2$. Comme T_2 est engendré par a_1, a_2, a_3, a_4 et a_6, qui sont tous doublement irréductibles, les sous-treillis maximaux de T_2 sont les $T_2 - \{a_k\}$, pour $k \in \{1,2,3,4,6\}$, tous ces treillis ont un treillis de congruences isomorphe à 2^2. Donc les sous-treillis de T_2 maximaux parmi ceux ayant la propriété d'avoir un treillis de congruences isomorphe à 2^2 sont les $T_2 - \{a_k\}$, pour $k \in \{1,2,3,4,6\}$. Mais $T_2 - \{a_k\}$ a un quotient isomorphe à 2, pour tout $k \in \{1,2,3,4\}$. Donc par $(*)$ et $(**)$, $B_1 = B_2 = T_2 - \{a_6\}$, d'où $2^4 \cong \operatorname{Con}(B_1 \cap B_2) \cong 2^2$. Donc $B_3 \neq T_2$. Par un argument dual nous avons aussi $B_3 \neq T_3$.

Supposons que $B_3 = T_4$. Les sous-treillis T_4 maximaux avec la propriété d'avoir un treillis de congruences isomorphe à 2^2 sont $T_4 - \{a_k\}$, pour tout $k \in \{1,2,5,6\}$, le treillis $T_4 - \{a_4, t_1\}$, et le treillis $T_4 - \{a_4, t_2\}$. De plus $T_4 - \{a_5\}$, $T_4 - \{a_6\}$, $T_4 - \{a_4, t_1\}$ et $T_4 - \{a_4, t_2\}$ ont tous un quotient isomorphe à 2, donc, par $(*)$ et $(**)$ les treillis B_1 et B_2 appartiennent à $\{T_4 - \{a_1\}, T_4 - \{a_2\}\}$. Mais $\operatorname{Con}(T_4 - \{a_1\}) \cong \operatorname{Con}(T_4 - \{a_2\}) \cong \operatorname{Con}(T_4 - \{a_1, a_2\}) \cong 2^2$, ce qui mène à une contradiction. Par conséquence $\vec{D}$ n'a pas de relèvement dans $\mathcal{V}_2$. Donc, par le Corollaire 3.6.6, $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) \leq \aleph_1$.

Tout les morphismes dans cette preuve préservent 0 et 1, donc

$$\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1^{0,1}; \mathcal{V}_2^{0,1}) = \operatorname{crit}(\mathcal{V}_1^{0}; \mathcal{V}_2^{0}) = \operatorname{crit}(\mathcal{V}_1^{0,1}; \mathcal{V}_2) = \aleph_1,$$

où $\mathcal{V}_1^{0,1}$ (resp., $\mathcal{V}_2^{0,1}$) est la variété de treillis bornés engendrée par T_1 (resp., T_2, T_3 et T_4) ; et nous avons un résultat analogue pour $\mathcal{V}_1^0$, etc. $\square$

4.2. Un minorant pour certains points critiques

Dans cette section, en utilisant les propriétés géométriques de certains treillis modulaires, nous prouverons que divers point critiques sont au moins $\aleph_2$. Ces résultats sont exposés dans [**12**].

LEMME 4.2.1. *Soit F un corps. Soit I une 2-échelle, soit $G_i = (\mathbb{Z}^{n_i}, \boldsymbol{u}^i)$ tel que $\boldsymbol{u}^i = (u^i_k)_{1\le k\le n_i}$ est une unité d'ordre, soit $R_i = \prod_{k=1}^{n_i} \mathrm{M}_{u^i_k}(F)$ pour tout $i \in I$. Soit $f_{i,j} \colon G_i \to G_j$ pour tous $i \le j$ dans I tel que $\vec{G} = (G_i, f_{i,j})_{i\le j \text{ dans } I}$ est un système inductif dans $\mathscr{P}$. Alors il existe un système inductif $(R_i, \phi_{i,j})_{i\le j \text{ dans } I}$ d'anneaux F-matriciels qui est un K_0-relèvement de $(G_i, f_{i,j})_{i\le j \text{ dans } I}$ tel que $\phi_{i,j}$ est un morphisme unitaire pour tous $i \le j$ dans I.*

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 2.7.46 il existe un isomorphisme de $\mathscr{P}$

$$\tau_i \colon (K_0(R_i), [R_i]) \to G_i = (\mathbb{Z}^{n_i}, \boldsymbol{u}^i) \text{ pour tout } i \in I.$$

Posons $g_{i,j} = \tau_j^{-1} \circ f_{i,j} \circ \tau_i$, pour tous $i \le j$ dans I.

Pour $i = j = 0$ (le plus petit élément de I), nous posons $\phi_{0,0} = \mathrm{id}_{R_0}$. Soit $i \in I$ avec i' comme prédécesseur immédiat. D'après le Théorème 2.7.45(1) il existe $\psi_{i',i} \colon R_{i'} \to R_i$ tel que $K_0(\psi_{i',i}) = g_{i',i}$.

Si i a seulement i' comme prédécesseur immédiat, supposons que nous ayons un système inductif $(R_j, \phi_{j,k})_{j\le k\le i'}$ qui est un K_0-relèvement de $(G_j, f_{j,k})_{j\le k\le i'}$. Posons $\phi_{j,i} = \psi_{i',i} \circ \phi_{j,i'}$ pour tout $j < i$, et $\phi_{i,i} = \mathrm{id}_{R_i}$. Il est clair que $(R_i, \phi_{j,k})_{j\le k\le i}$ est un système direct relevant $(G_j, f_{j,k})_{j\le k\le i}$.

Si i a deux prédécesseurs immédiats i' et i''. Posons $\ell = i' \wedge i''$. Si nous avons des systèmes inductifs $(R_j, \phi_{j,k})_{j\le k\le i'}$ et $(R_j, \phi_{j,k})_{j\le k\le i''}$ relevant respectivement $(G_j, f_{j,k})_{j\le k\le i'}$ et $(G_j, f_{j,k})_{j\le k\le i''}$. Les égalités suivant sont vraies

$$K_0(\psi_{i',i} \circ \phi_{\ell,i'}) = K_0(\psi_{i',i}) \circ K_0(\phi_{\ell,i'}) = g_{i',i} \circ g_{\ell,i'} = g_{\ell,i},$$

de même $K_0(\psi_{i'',i} \circ \phi_{\ell,i''}) = g_{\ell,i} = K_0(\psi_{i',i} \circ \phi_{\ell,i'})$. Par le Théorème 2.7.45(2), il existe un automorphisme intérieur θ de R_i tel que $\theta \circ \psi_{i'',i} \circ \phi_{\ell,i''} = \psi_{i',i} \circ \phi_{\ell,i'}$. Posons $\phi_{i',i} = \psi_{i',i}$ et $\phi_{i'',i} = \theta \circ \psi_{i'',i}$. Donc $\phi_{i',i} \circ \phi_{i'\wedge i'',i'} = \phi_{i'',i} \circ \phi_{i'\wedge i'',i''}$, nous pouvons alors construire un système inductif $(R_j, \phi_{j,k})_{j\le k\le i}$.

En raisonnant par induction, nous obtenons un système inductif $(R_i, \phi_{i,j})_{i\le j \text{ dans } I}$ tel que $K_0(\phi_{i,j}) = g_{i,j}$ pour tous $i \le j$ dans I. $\square$

LEMME 4.2.2. *Soit F un corps. Soit L un treillis modulaire borné tel que tous les sous-treillis finiment engendrés de L sont de longueur finie. Supposons que* $\operatorname{card} L \le \aleph_1$. *Alors il existe un anneau localement matriciel R tel que* $\operatorname{Con} L \cong \operatorname{Con} \mathbb{L}(R)$ *et* $\mathbb{L}(R) \in \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^n \mid n < \omega)$.

Si de plus il existe $n < \omega$ tel que $n \ge$ $\mathrm{lh}(K)$ *pour tous les treillis simples $K \in$* $\mathbf{Var}(L)$ *de longueur finie, alors il existe un anneau localement matriciel R tel que* $\operatorname{Con} L \cong \operatorname{Con} \mathbb{L}(R)$ *et* $\mathbb{L}(R) \in \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^n)$.

DÉMONSTRATION. Soit I une 2-échelle de cardinal $\aleph_1$. Soit $\rho \colon I \twoheadrightarrow L$ une surjection et notons L_i le sous-treillis de L engendré par $\rho(I \downarrow i) \cup \{0, 1\}$, pour tout $i \in I$. Notons

$f_{i,j}\colon L_i \to L_j$ le morphisme d'inclusion, pour tous $i \leq j$ dans I. Alors $\vec{L} = (L_i, f_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$ un système inductif de treillis modulaires de longueur finie et de $0,1$-morphismes de treillis bornés.

Supposons qu'il existe $n < \omega$ tel que $n \geq \operatorname{lh}(K)$ pour tout treillis simple $K \in \mathbf{Var}(L)$ de longueur finie. Soit $\vec{G} = K_0^\ell \circ \vec{L}$, posons $X_i = \mathrm{M}(\operatorname{Con} L_i)$ pour tout $i \in I$, et posons $r_x^i = \operatorname{lh}(L_i/x)$ pour tout $x \in X_i$. Comme L_i/x est un treillis modulaire sous-directement irréductible de longueur finie, il est simple, donc $r_x^i \leq n$, pour tout $i \in I$ et tout $x \in X_i$. Par le Lemme 2.8.7, $G_i \cong (\mathbb{Z}^{X_i}, (r_x^i)_{x\in X_i})$ pour tout $i \in I$.

Posons $R_i = \prod_{x\in X_i} \mathrm{M}_{r_x^i}(F)$. Le Lemme 2.7.46 implique :

$$(K_0(R_i), [R_i]) \cong (\mathbb{Z}^{X_i}, (r_x^i)_{x\in X}) \cong G_i.$$

Le Lemme 4.2.1 donne la construction d'un système inductif $\vec{R} = (R_i, \phi_{i,j})_{i\leq j \text{ dans } I}$ dont les morphismes préservent les unités, tel que :

$$K_0 \circ \vec{R} \cong \vec{G} = K_0^\ell \circ \vec{L}. \tag{4.2.1}$$

De plus,

$$\mathbb{L}(R_i) \cong \mathbb{L}\left(\prod_{x\in X_i} \mathrm{M}_{r_x^i}(F)\right) \cong \prod_{x\in X_i} \mathbb{L}(\mathrm{M}_{r_x^i}(F)) \cong \prod_{x\in X_i} \operatorname{Sub}(F^{r_x^i}) \in \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^n).$$

Soit $R = \varinjlim \vec{R}$. Comme $\mathbb{L}$ préserve les limites inductives, $\mathbb{L}(R) \cong \varinjlim(\mathbb{L}\circ\vec{R})$, mais $\mathbb{L}\circ\vec{R}$ est un diagramme de $\mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^n)$, donc $\mathbb{L}(R) \in \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^n)$. De plus, les isomorphismes suivants sont satisfaits :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Con_c}(\mathbb{L}(R)) &\cong \overline{\nabla}(K_0(R)) && \text{par la Proposition 2.7.44}\\
&\cong \overline{\nabla}(K_0(\varinjlim \vec{R})) && \\
&\cong \overline{\nabla}(\varinjlim(K_0 \circ \vec{R})) && \text{car } K_0 \text{ préserve les limites inductives}\\
&\cong \overline{\nabla}(\varinjlim(K_0^\ell \circ \vec{L})) && \text{par (4.2.1)}\\
&\cong \overline{\nabla}(K_0^\ell(\varinjlim \vec{L})) && \text{car } K_0^\ell \text{ préserve les limites inductives}\\
&\cong \overline{\nabla}(K_0^\ell(L)) && \\
&\cong \operatorname{Con_c} L && \text{par la Proposition 2.8.5.}
\end{aligned}$$

L'autre cas, sans la restriction sur la longueur des treillis simples est similaire. □

Le Lemme 4.2.2 fonctionne avec des treillis bornés, cependant tout treillis se plonge dans un treillis borné dans la même variété. Dans la suite de cette section, en utilisant ce résultat, nous allons généraliser le Lemme 4.2.2 au treillis sans bornes.

Lemme 4.2.3. *Soit L un treillis, soit $L' = L \sqcup \{0,1\}$ tel que 0 est le plus petit élément de L' et 1 est le plus grand élément de L'. Soit $f\colon L \hookrightarrow L'$ le morphisme d'inclusion. Alors $\operatorname{Con_c} f$ est un $(\vee,0)$-plongement de $(\vee,0)$-demi-treillis et $(\operatorname{Con_c} f)(\operatorname{Con_c} L)$ est un idéal de $\operatorname{Con_c} L'$.*

Démonstration. Soit $\theta \in \mathrm{Con_c}\, L$, soit $L'_\theta = (L/\theta) \sqcup \{0,1\}$ tel que 0 est le plus petit élément L'_θ et 1 soit le plus grand élément. L'application suivante :

$$g\colon L' \to L'_\theta$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x/\theta & \text{if } x \in L \end{cases}$$

est un morphisme de treillis et $\ker g = \theta \cup \{(0,0),(1,1)\}$ est une congruence de L'. Il en découle que $(\mathrm{Con_c}\, f)(\theta) = \theta \cup \{(0,0),(1,1)\}$. Donc $\mathrm{Con_c}\, f$ est un plongement. Soit $\beta = \bigvee_{i=1}^{n} \Theta_{L'}(x_i, y_i) \in \mathrm{Con_c}\, L'$, tel que $\beta \subseteq (\mathrm{Con_c}\, f)(\theta)$. Nous pouvons supposer que $x_i \neq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc, comme $(x_i, y_i) \in \theta \cup \{(0,0),(1,1)\}$, $(x_i, y_i) \in \theta$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Posons $\alpha = \bigvee_{i=1}^{n} \Theta_L(x_i, y_i)$, alors $(\mathrm{Con_c}\, f)(\alpha) = \beta$. Donc $(\mathrm{Con_c}\, f)(\mathrm{Con_c}\, L)$ est un idéal de $\mathrm{Con_c}\, L'$. □

Lemme 4.2.4. *Soit R un anneau régulier et soit I un idéal bilatère de R. Alors les assertions suivantes sont satisfaites :*

(1) *L'ensemble I est un sous-anneau régulier de R.*

(2) *Tout idéal à droite* (*resp., à gauche*) *de I est un idéal à droite* (*resp., à gauche*) *de R.*

(3) *En particulier* $\mathrm{Id}(I) = \mathrm{Id}(R) \downarrow I$ *et* $\mathbb{L}(I) = \mathbb{L}(R) \downarrow I$.

Démonstration. L'assertion (1) découle de [**19**, Lemma 1.3].

Soit J un idéal à droite de I, soit $a \in J$, soit $x \in R$. Comme I est régulier il existe $y \in I$ tel que $a = aya$, d'où $ax = ayax$, mais $a \in I$, donc $yax \in I$, de plus J est un idéal à droite de I, donc $ax = ayax \in J$. En conséquence J est un idéal à droite de R. De manière similaire tout idéal à gauche de I est un idéal à gauche de R. Donc $\mathrm{Id}(I) = \mathrm{Id}(R) \downarrow I$.

Soit $a \in R$ idempotent. Si $aR \subseteq I$, alors $a \in I$, donc $aI \subseteq aR = aaR \subseteq aI$ et donc $aI = aR$, d'où $aR \in \mathbb{L}(I)$. Donc $\mathbb{L}(I) = \mathbb{L}(R) \downarrow I$. □

Théorème 4.2.5. *Soit F un corps. Soit $\mathcal{V}$ une variété de treillis modulaires* (*resp., une variété de treillis modulaires bornés*). *Supposons que tout les treillis finiment engendrés de $\mathcal{V}$ soient de longueur finie. Alors*

$$\mathrm{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}_0(\mathrm{Sub}\, F^n \mid n \in \omega)) \geq \aleph_2 \quad (\textit{resp.,}\ \mathrm{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}_{0,1}(\mathrm{Sub}\, F^n \mid n \in \omega)) \geq \aleph_2).$$

Si $L \in \mathcal{V}$ est de cardinal au plus $\aleph_1$, alors il existe un anneau régulier A tel que $\mathrm{Con}\, L \cong \mathrm{Con}(\mathbb{L}A)$ *et* $\mathbb{L}(A) \in \mathbf{Var}_0(\mathrm{Sub}\, F^n)$ (*resp.,* $\mathbb{L}(A) \in \mathbf{Var}_{0,1}(\mathrm{Sub}\, F^n)$).

S'il existe $n < \omega$ tel que $\mathrm{lh}(K) \leq n$ *pour tout treillis simple de longueur finie $K \in \mathcal{V}_1$, alors :*

$$\mathrm{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}_0(\mathrm{Sub}\, F^n)) \geq \aleph_2 \quad (\textit{resp.,}\ \mathrm{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}_{0,1}(\mathrm{Sub}\, F^n)) \geq \aleph_2).$$

Si $L \in \mathcal{V}$ est de cardinal au plus $\aleph_1$, alors il existe un anneau régulier A tel que $\mathrm{Con}\, L \cong \mathrm{Con}(\mathbb{L}(A))$ *et* $\mathbb{L}(A) \in \mathbf{Var}_0(\mathrm{Sub}\, F^n)$ (*resp.,* $\mathbb{L}(A) \in \mathbf{Var}_{0,1}(\mathrm{Sub}\, F^n)$).

Remarquons que le treillis $\mathbb{L}(A)$ est, de plus, relativement complémenté ; en particulier il est congruence-permutable.

Démonstration. Le cas borné est une application immédiate du Lemme 4.2.2.

Soit $\mathcal{V}$ une variété de treillis modulaires dans laquelle les treillis finiment engendrés sont de longueur finie. Soit $L \in \mathcal{V}$ tel que $\operatorname{card} L \leq \aleph_1$, soit $L' = L \sqcup \{0,1\}$ comme dans le Lemme 4.2.3 et soit D l'idéal de $\mathrm{Con_c}\, L'$ correspondant à $\mathrm{Con_c}\, L$. Par [**13**, Chapter I, Section 4, Exercise 14] nous avons $L' \in \mathcal{V}$, donc, par le Lemme 4.2.2, il existe un anneau régulier R tel que $\mathbb{L}(R) \in \mathbf{Var}_0(\operatorname{Sub} F^n)$ et $\mathrm{Con_c}(\mathbb{L}R) \cong \mathrm{Con_c}\, L'$. Il découle de la Proposition 2.7.37 que $\mathrm{Con_c}(\mathbb{L}R) \cong \mathrm{Id_c}\, R$. Soit I l'idéal de R correspondant à D. Alors $\operatorname{Con} L \cong \operatorname{Id} D \cong \operatorname{Id} R \downarrow I \cong \operatorname{Id} I \cong \operatorname{Con}(\mathbb{L}I)$, de plus $\mathbb{L}(I) = \mathbb{L}(R) \downarrow I$ appartient à $\mathcal{V}_2$. $\square$

Nous pouvons maintenant calculer des points critiques entre diverses variétés de treillis. Considérons les treillis M_n et $M_{n,m}$ pour tous $3 \leq m, n \leq \omega$ sur la Figure 4.3. Soit $\mathcal{M}_n$ la variété de treillis engendrée par M_n, soit $\mathcal{M}_{n,m}$ la variété de treillis engendrée par $M_{n,m}$, soit $\mathcal{M}_n^0$ la variété de treillis avec 0 engendrée par M_n etc.

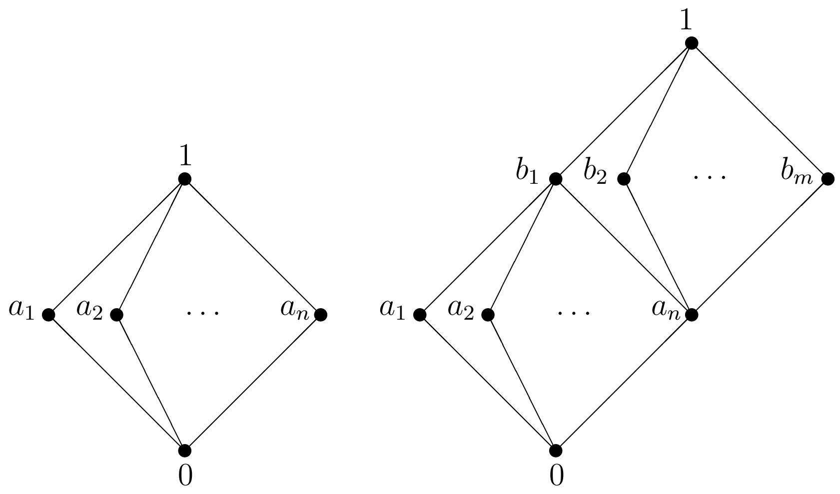

Figure 4.3. Les treillis M_n et $M_{n,m}$.

Le Théorème 4.2.5 nous permet d'obtenir la généralisation suivante du résultat de Ploščica dans [**29**].

Corollaire 4.2.6. *Soient $m > n \geq 3$ des entiers, alors* $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_m; \mathcal{M}_n) = \aleph_2$.

Démonstration. Tout treillis simples de $\mathcal{M}_n$ est de longueur au plus deux, de plus $\operatorname{Sub} \mathbb{F}_2^2 \cong M_3 \in \mathcal{M}_n$, où $\mathbb{F}_2$ est le corps à deux éléments. Il découle donc du Théorème 4.2.5 que $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_m; \mathcal{M}_n) \geq \aleph_2$.

Réciproquement, Ploščica a démontré dans [**28**] qu'il existe un $(\vee, 0)$-demi-treillis de cardinal $\aleph_2$, relevable dans $\mathcal{M}_m$, mais pas relevable dans $\mathcal{M}_n$. Donc $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_m; \mathcal{M}_n) \leq \aleph_2$. $\square$

Dans la Section 4.3 nous donnerons un autre $(\vee, 0)$-demi-treillis de cardinal $\aleph_2$, relevable dans $\mathcal{M}_n$, mais pas relevable dans $\mathcal{M}_m$.

4.3. Majorants pour certains points critiques

Les résultats de cette section sont exposés dans [**12**].

En utilisant les résultats du Chapitre 3, nous prouvons d'abord que si un treillis simple d'une variété de treillis $\mathcal{V}_1$ a une longueur strictement plus grande que celles de tous les treillis simples d'une variété de treillis $\mathcal{V}_2$, alors $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) \leq \aleph_0$.

Remarque 4.3.1. Soit $x \prec y$ dans un treillis L. Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de congruences de L, si $(x,y) \in \bigvee_{i\in I} \alpha_i$, alors $(x,y) \in \alpha_i$ pour un $i \in I$. En particulier il existe une plus grande congruence séparant x et y. Une telle congruence est complètement inf-irréductible. Dans un treillis de longueur finie toutes les congruences complètement inf-irréductibles sont de cette forme.

Lemme 4.3.2. *Soit L un treillis et $n \geq 0$. Si $\operatorname{Con_c} L \cong 2^n$ alors $\operatorname{lh}(L) \geq n$. Si C est une chaîne maximale finie de L, alors $\operatorname{Con_c} f$ est surjective, où $f\colon C \to L$ est le plongement canonique.*

Démonstration. Si L n'a pas de chaîne maximale finie, alors $\operatorname{lh}(L) \geq n$ est immédiat. Supposons que C soit une chaîne maximale finie de L. Notons $0 = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_m = 1$ les éléments de C. Soit $f\colon C \to L$ le plongement canonique.

Soit $k \in \{0,\dots,m-1\}$. Nous avons $x_k \prec x_{k+1}$, donc $\Theta_L(x_k,x_{k+1})$ est sup-irréductible dans $\operatorname{Con_c} L$. Comme $\operatorname{Con_c} L$ est booléen, $\Theta_L(x_k,x_{k+1})$ est un atome de $\operatorname{Con_c} L$.

Soit θ un atome de $\operatorname{Con_c} L$, nous avons :

$$\theta \leq \Theta_L(0,1) = \bigvee_{k=0}^{m-1} \Theta_L(x_k,x_{k+1})$$

Donc il existe $k \in \{0,\dots,m-1\}$ tel que $\theta \leq \Theta_L(x_k,x_{k+1})$. Mais $\Theta_L(x_k,x_{k+1})$ est un atome de $\operatorname{Con_c} L$, d'où $\theta = \Theta_L(x_k,x_{k+1})$. Donc $\operatorname{Con_c} f$ est surjective, par suite $m \geq n$, en conséquence $\operatorname{lh}(L) \geq n$. □

Théorème 4.3.3. *Soit $\mathcal{V}_1$ une variété de treillis (resp., une variété de treillis bornés), soit $\mathcal{V}_2$ une variété finiment engendrée de treillis, soit D un $(\vee,0)$-demi-treillis fini. Si il existe un relèvement $K \in \mathcal{V}_1$ de D de longueur strictement plus grande que tout relèvement de D dans $\mathcal{V}_2$, alors $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) \leq \aleph_0$. En plus si $\mathcal{V}_1$ est une variété finiment engendrée de treillis modulaires et $\mathcal{V}_2$ est non-triviale, alors $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) = \aleph_0$.*

Démonstration. Comme D est fini, quitte à prendre un sous-treillis, nous pouvons supposer que $\operatorname{card} K \leq \aleph_0$. Soit n la plus grande longueur d'un relèvement de D dans $\mathcal{V}_2$. Comme $\operatorname{lh}(K) > n$, il existe une chaîne C de K de longueur $n+1$ (resp., nous pouvons supposer que 0 et 1 sont dans C). Soit $f\colon C \to K$ l'injection canonique. Supposons que $g\colon C' \to K'$ soit un relèvement de $\operatorname{Con_c} f$ dans $\mathcal{V}_2$. Comme f est injective, g est aussi injective. Comme $\operatorname{Con_c} K' \cong \operatorname{Con_c} K \cong D$, $\operatorname{lh}(K') \leq n$. En plus $\operatorname{Con_c} C' \cong \operatorname{Con_c} C \cong 2^{n+1}$. Il découle donc du Lemme 4.3.2 que $\operatorname{lh}(C') = n+1$. D'où $n \geq \operatorname{lh}(K') \geq \operatorname{lh}(C') = n+1$; une contradiction.

En conséquence $\operatorname{Con_c} f$ n'a pas de relèvement dans $\mathcal{V}_2$. Comme $\operatorname{card} K \leq \aleph_0$ et en appliquant le Corollaire 3.6.6 nous obtenons $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) \leq \aleph_0$ (dans le cas borné f préserve les bornes, le résultat reste vraie).

Si de plus $\mathcal{V}_1$ est une variété finiment engendrée de treillis modulaires, alors les $(\vee, 0)$-demi-treillis finis relevables dans $\mathcal{V}_1$ sont les treillis booléens finis. Les treillis finis booléens sont aussi relevables dans $\mathcal{V}_2$. En conséquence $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \aleph_0$. $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 4.3.3 et du Théorème 4.2.5. Il montre que le point critique entre une variété finiment engendrée de treillis modulaires et une variété de treillis engendrée par le treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel fini ne peut pas être $\aleph_1$.

COROLLAIRE 4.3.4. *Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée de treillis modulaires, soit F un corps fini, soit $n \geq 1$ un entier. S'il existe un treillis simple $K \in \mathcal{V}$ tel que $\operatorname{lh}(K) > n$, alors $\operatorname{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^n)) = \aleph_0$, sinon $\operatorname{crit}(\mathcal{V}; \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^n)) \geq \aleph_2$.*

Nous donnerons maintenant un diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis $\vec{S}$ relevable dans $\mathcal{M}_n$, tel que pour toute variété finiment engendrée de treillis, engendrée par des treillis de longueur au plus trois, le diagramme $\vec{S}$ est relevable dans $\mathcal{V}$ si et seulement si $M_n \in \mathcal{V}$.

Soit $n \geq 3$ un entier. Posons $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$, et posons :

$$I_n = \{P \in \mathfrak{P}(\underline{n}) \mid \text{soit } \operatorname{card}(P) \leq 2, \text{ soit } P = \underline{n}\},$$

(voir Chapitre 3, Lemme 3.3.5). Notons $a_0, \dots, a_{n-1}$ les atomes de M_n. Posons $A_P = \{a_x \mid x \in P\} \cup \{0, 1\}$, pour tout $P \in I_n$. Soit $f_{P,Q} \colon A_P \to A_Q$ l'inclusion canonique, pour $P \subseteq Q$ dans I_n. Alors $\vec{A} = (A_P, f_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ est un système inductif dans $\mathcal{M}_n^{0,1}$. Le diagramme $\vec{S}$ est défini comme $\operatorname{Con_c} \circ \vec{A}$.

LEMME 4.3.5. *Soit $\vec{B} = (B_P, g_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ un relèvement de $\operatorname{Con_c} \circ \vec{A}$ avec des treillis, tel que $g_{P,Q}$ soit une inclusion, pour tout $P \leq Q$ dans I. Soient $u < v$ dans $B_\emptyset$. Soit $P \in I_n$ alors :*

$$\Theta_{B_P}(u, v) = B_P \times B_P, \quad \textit{la plus grande congruence de } B_P.$$

Soit $\vec{\xi} = (\xi_P)_{P \in I} \colon \operatorname{Con_c} \circ \vec{A} \to \operatorname{Con_c} \circ \vec{B}$ un isomorphisme naturel. Soient $x, y \in \underline{n}$ distincts. Soient $b_x \in [u, v]_{B_{\{x\}}}$ et $b_y \in [u, v]_{B_{\{y\}}}$. Posons $P = \{x, y\}$. Soit $c \in \{0, 1\}$. Alors les assertions suivantes sont satisfaites :

1. *Si $\Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x) = \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(c, a_x))$, alors $\Theta_{B_P}(u, b_x) = \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x))$.*
2. *Si $\Theta_{B_{\{z\}}}(u, b_z) = \xi_{\{z\}}(\Theta_{A_{\{z\}}}(c, a_z))$ pour tout $z \in \{x, y\}$, alors $b_x \wedge b_y = u$.*
3. *Si $\Theta_{B_{\{x\}}}(b_x, v) = \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(c, a_x))$, alors $\Theta_{B_P}(b_x, v) = \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x))$.*
4. *Si $\Theta_{B_{\{z\}}}(b_z, v) = \xi_{\{z\}}(\Theta_{A_{\{z\}}}(c, a_z))$ pour tout $z \in \{x, y\}$, alors $b_x \vee b_y = v$.*
5. *Si $\Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x) = \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(c, a_x))$ et $\Theta_{B_{\{y\}}}(b_y, v) = \xi_{\{y\}}(\Theta_{A_{\{y\}}}(c, a_y))$, alors $b_x \leq b_y$.*

DÉMONSTRATION. Comme $f_{P,Q}$ préserve les bornes, $\operatorname{Con_c} f_{P,Q}$ préserve les bornes, donc $\operatorname{Con_c} g_{P,Q}$ préserve les bornes, pour tout $P \leq Q$ dans I_n. Soit $u < v$ dans $B_\emptyset$. Comme $B_\emptyset$ est simple, $\Theta_{B_\emptyset}(u, v)$ est la plus grande congruence de $B_\emptyset$. En plus, $\operatorname{Con_c} g_{\emptyset,P}$ préserve les bornes, pour tout $P \in I_n$. En conséquence :

$$\Theta_{B_P}(u, v) = B_P \times B_P, \quad \text{la plus grande congruence de } B_P.$$

(1) Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
\Theta_{B_P}(u, b_x) &= (\mathrm{Con_c}\, g_{\{x\},P})(\Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x)) \\
&= (\mathrm{Con_c}\, g_{\{x\},P})(\xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(c, a_x))) && \text{par hypothèse} \\
&= \xi_P \circ (\mathrm{Con_c}\, f_{\{x\},P})(\Theta_{A_{\{x\}}}(c, a_x)) \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x)).
\end{aligned}$$

(2) Les inclusions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned}
\Theta_{B_P}(u, b_x \wedge b_y) &\subseteq \Theta_{B_P}(u, b_x) \cap \Theta_{B_P}(u, b_y) \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x)) \cap \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_y)) && \text{par (1)} \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x) \cap \Theta_{A_P}(c, a_y)) \\
&= \xi_P(\mathrm{id}_{A_P}) = \mathrm{id}_{B_P}.
\end{aligned}$$

donc $u = b_x \wedge b_y$.

(3) Similaire à (1).

(4) Les inclusions suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}
\Theta_{B_P}(b_x \vee b_y, v) &\subseteq \Theta_{B_P}(b_x, v) \cap \Theta_{B_P}(b_y, v) \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x)) \cap \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_y)) && \text{par (3)} \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x) \cap \Theta_{A_P}(c, a_y)) \\
&= \xi_P(\mathrm{id}_{A_P}) = \mathrm{id}_{B_P}.
\end{aligned}$$

donc $v = b_x \vee b_y$.

(5) Les inclusions suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}
\Theta_{B_P}(b_y, b_x \vee b_y) &\subseteq \Theta_{B_P}(u, b_x) \cap \Theta_{B_P}(b_y, v) \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x)) \cap \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_y)) && \text{par (1) et (3)} \\
&= \xi_P(\Theta_{A_P}(c, a_x) \cap \Theta_{A_P}(c, a_y)) \\
&= \xi_P(\mathrm{id}_{A_P}) = \mathrm{id}_{B_P}.
\end{aligned}$$

donc $b_y = b_x \vee b_y$, d'où $b_x \leq b_y$. $\square$

Le lemme suivant montre que si nous avons un suffisamment «petit» relèvement de $\mathrm{Con_c} \circ \vec{A}$ dans une variété, alors M_n appartient à cette variété.

LEMME 4.3.6. *Soit* $\vec{B} = (B_P, g_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ *un relèvement de* $\mathrm{Con_c} \circ \vec{A}$ *par des treillis. Supposons que* $B_{\{x\}}$ *soit une chaîne de longueur deux pour tout* $x \in \underline{n}$. *Alors* M_n *se plonge dans* $B_{\underline{n}}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\vec{\xi} = (\xi_P)_{P \in I_n} \colon \mathrm{Con_c} \circ \vec{A} \to \mathrm{Con_c} \circ \vec{B}$ un isomorphisme naturel. Comme $f_{P,Q}$ est un plongement, $\mathrm{Con_c}\, f_{P,Q}$ sépare 0, donc $\mathrm{Con_c}\, g_{P,Q}$ sépare 0, nous pouvons donc supposer que $g_{P,Q}$ est une inclusion de B_P dans B_Q, pour tous $P \leq Q$ dans I_n.

Soient $u < v$ dans $B_\emptyset$. Il découle du Lemme 4.3.5 que $\Theta_{B_{\{x\}}}(u, v)$ est la plus grande congruence de $B_{\{x\}}$. En plus $B_{\{x\}}$ est une chaîne à trois éléments, donc u est le plus petit élément de $B_{\{x\}}$ et v est le plus grand élément. Dans la suite nous notons b_x l'élément du milieu de $B_{\{x\}}$.

La congruence $\xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x))$ est sup-irréductible, en conséquence elle est égale soit à $\Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x)$ soit à $\Theta_{B_{\{x\}}}(b_x, v)$. Posons :

$$X' = \{x \in \underline{n} \mid \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x)) = \Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x)\},$$
$$X'' = \{x \in \underline{n} \mid \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x)) = \Theta_{B_{\{x\}}}(b_x, v)\}.$$

Comme $\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x)$ est le complément de $\Theta_{A_{\{x\}}}(a_x, 1)$ et $\Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x)$ est le complément de $\Theta_{B_{\{x\}}}(b_x, v)$, nous obtenons aussi :

$$X' = \{x \in \underline{n} \mid \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(a_x, 1)) = \Theta_{B_{\{x\}}}(b_x, v)\}$$
$$X'' = \{x \in \underline{n} \mid \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(a_x, 1)) = \Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x)\}.$$

Donc $\underline{n} = X' \cup X''$. Comme $\operatorname{card} \underline{n} \geq 3$, nous avons $\operatorname{card} X' \geq 2$ ou $\operatorname{card} X'' \geq 2$.

Supposons que $\operatorname{card} X' \geq 2$. Soient x, y dans X' distincts. Le Lemme 4.3.5(2), implique que $b_x \wedge b_y = u$. Par le Lemme 4.3.5(4), $b_x \vee b_y = v$.

Soient x, y dans X' distincts. Soit $z \in X''$. Comme :

$$\xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x)) = \Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x) \text{ et } \xi_{\{z\}}(\Theta_{A_{\{z\}}}(0, a_z)) = \Theta_{B_{\{z\}}}(b_z, v)$$

il découle du Lemme 4.3.5(5) que $b_x \leq b_z$. Comme :

$$\xi_{\{z\}}(\Theta_{A_{\{z\}}}(a_z, 1)) = \Theta_{B_{\{z\}}}(u, b_z) \text{ et } \xi_{\{y\}}(\Theta_{A_{\{y\}}}(a_y, 1)) = \Theta_{B_{\{y\}}}(b_y, v)$$

il découle du Lemme 4.3.5(5) que $b_z \leq b_y$. Donc $b_x \leq b_y$. D'où $u = b_x \wedge b_y = b_x > u$, une contradiction.

Donc $X'' = \emptyset$, d'où $X' = \underline{n}$ et donc $\{u, b_0, b_1, \dots, b_n, v\}$ est un sous-treillis de $B_{\underline{n}}$ isomorphe à M_n. Le cas $\operatorname{card} X'' \geq 2$ est similaire. $\square$

En utilisant le Lemme 3.6.15 avec le recouvrement normé du Lemme 3.3.5 nous obtenons le résultat suivant.

LEMME 4.3.7. *Soit $\mathcal{V}_1$ une variété d'algèbres localement $\leq \aleph_2$, soit $\mathcal{V}_2$ une variété finiment engendrée d'algèbres congruence-distributives telle que* $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \aleph_2$. *Soit $\vec{D}\colon I_n \to \mathscr{S}$ un diagramme de $(\vee, 0)$-demi-treillis finis. Si $\vec{D}$ est relevable dans $\mathcal{V}_1$, alors $\vec{D}$ est relevable dans $\mathcal{V}_2$.*

En utilisant le Lemme 3.6.16 avec le recouvrement normé du Lemme 3.3.5 nous obtenons le résultat suivant.

LEMME 4.3.8. *Soit $\alpha \geq 1$ un ordinal. Soient $\mathcal{V}_1$ une variété d'algèbres avec un type de similarité de cardinal au plus $\aleph_\alpha$. Soit $\vec{D} = (D_P, \varphi_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ un système inductif de $(\vee, 0)$-demi-treillis. Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(1) $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) > \aleph_{\alpha+2}$.

(2) $\operatorname{card}(D_P) < \aleph_\alpha$, *pour tout $P \in I_n - \{\underline{n}\}$.*

(3) $\operatorname{card}(D_{\underline{n}}) \leq \aleph_{\alpha+2}$.

(4) *$\vec{D}$ est relevable dans $\mathcal{V}_1$.*

Alors $\vec{D}$ est relevable dans $\mathcal{V}_2$.

Le lemme suivant implique en particulier qu'un treillis modulaire de longueur trois est une extension préservant les congruences de l'une de ses sous-chaînes.

LEMME 4.3.9. *Soit L un treillis de longueur au plus trois, soient u, v dans L tels que $\Theta_L(u,v) = L \times L$. Si $\operatorname{Con_c} L \cong 2^2$, alors il existe $x \in L$ avec $u < x < v$ tel que L est une extension préservant les congruences de la chaîne $C = \{u, x, v\}$.*

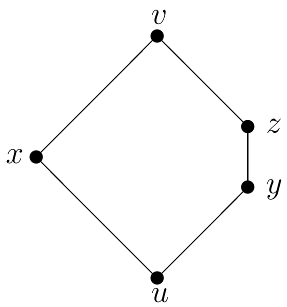

FIGURE 4.4. Le treillis N_5.

DÉMONSTRATION. Comme $\operatorname{Con_c} L \cong 2^2$, $\operatorname{lh}([u,v]) \geq 2$. Si $\operatorname{lh}([u,v]) = 2$, alors soit $C = \{u, x, v\}$, où x est un élément tel que $u < x < v$. Soit $i\colon C \to L$ l'injection canonique. Le morphisme $\operatorname{Con_c} i\colon \operatorname{Con_c} C \to \operatorname{Con_c} L$ est surjectif, de plus $\operatorname{Con_c} C \cong 2^2 \cong \operatorname{Con_c} L$, donc $\operatorname{Con_c} i$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que $[u,v]$ est de longueur trois. Comme $\operatorname{lh}(L) \leq 3$, $\operatorname{lh}(L) = 3$, u est le plus petit élément de L et v est le plus grand élément de L.

Supposons que L a un sous-treillis isomorphe à N_5, nommons ses éléments comme dans la Figure 4.4. Alors $C = \{u, y, z, v\}$ est une chaîne maximal de L. Soit $i\colon C \to L$ le morphisme d'inclusion. Par le Lemme 4.3.2, $\operatorname{Con_c} i$ est surjectif. Donc, comme $\operatorname{Con} L \cong 2^2$, et $\Theta_L(u,y)$, $\Theta_L(y,z)$, et $\Theta_L(z,v)$ sont les atomes de $\operatorname{Con} L$,

$$\Theta_L(y,z) \subseteq \Theta_L(u,y) \cap \Theta_L(y,z) \cap \Theta_L(z,v) = \mathrm{id}_L,$$

une contradiction. En conséquence L ne contient aucun sous-treillis isomorphe à N_5, par suite L est modulaire.

Comme $\operatorname{Con} L \cong 2^2$ et $\operatorname{lh}(L) = 3$, L n'est pas distributif. Donc il existe un sous-treillis de L isomorphe à M_3, soit $a < x_1, x_2, x_3 < b$ ses éléments. Comme L est modulaire, $[a, x_1]_L \cong [x_1, b]_L$, donc $\operatorname{lh}([a,b]_L)$ est pair. Mais $2 \leq \operatorname{lh}([a,b]_L) \leq 3$, d'où $\operatorname{lh}([a,b]_L) = 2$, donc $a \prec x_1 \prec b$. Cette chaîne peut être complétée en une chaîne maximale $c \prec a \prec x_1 \prec b$ ou $a \prec x_1 \prec b \prec c$. Par symétrie nous pouvons supposer que $b < c$. Observons que $a = u$ et $c = v$. Posons $C = \{u, b, v\}$ et $C_1 = \{u, x_1, b, v\}$. Soit $i\colon C \to L$ et $i_1\colon C_1 \to L$ les morphismes d'inclusions. Comme C_1 est une chaîne maximale, $\operatorname{Con_c} i_1$ est surjectif. Comme $\Theta_L(u, x_1) = \Theta_L(x_1, b) = \Theta_L(u,b)$, $\operatorname{Con_c} i_1$ et $\operatorname{Con_c} i$ ont la même image, donc $\operatorname{Con_c} i$ est surjectif, en conséquence $\operatorname{Con_c} i$ est un isomorphisme. $\square$

Les résultats du Lemme 4.3.9 ne peuvent pas être étendus aux treillis de longueur quatre ou plus. Le treillis de la Figure 4.5 n'est l'extension préservant les congruences d'aucune chaîne avec u et v comme extrémités.

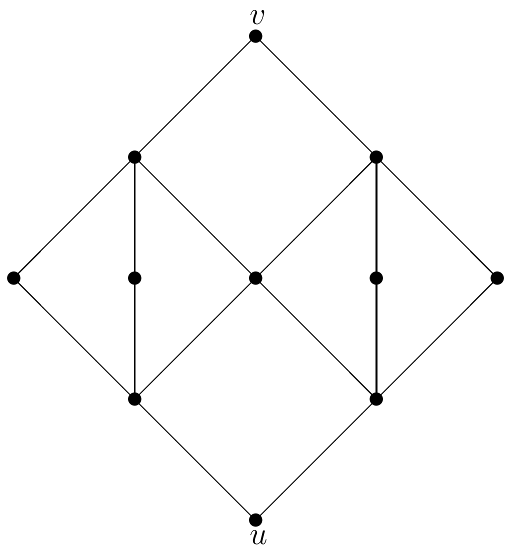

FIGURE 4.5. Le Lemme 4.3.9 ne s'étend pas aux plus grandes longueurs.

LEMME 4.3.10. *Soit* $n \geq 4$ *un entier, soit* $\mathcal{V}$ *une variété finiment engendrée de treillis telle que* $M_n \notin \mathcal{V}$. *Si* $\mathrm{lh}(K) \leq 3$ *pour tout treillis simple* K *de* $\mathcal{V}$, *alors* $\mathrm{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathcal{V}) \leq \aleph_2$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathrm{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathcal{V}) > \aleph_2$. Comme $M_n \in \mathcal{M}_n^{0,1}$, $\vec{A}$ est un système inductif de $\mathcal{M}_n^{0,1}$ indexé par I_n. Il découle du Lemme 4.3.7 que $\mathrm{Con_c} \circ \vec{A}$ a un relèvement $\vec{B} = (B_P, g_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ dans $\mathcal{V}$. Comme $\mathrm{Con}\, B_{\underline{n}} \cong 2$, le treillis $B_{\underline{n}}$ est simple, donc, en utilisant les hypothèses sur $\mathcal{V}$ nous avons $\mathrm{lh}(B_{\underline{n}}) \leq 3$, d'où $\mathrm{lh}(B_{\{x\}}) \leq 3$ pour tout $x \in \underline{n}$. Le treillis $B_\emptyset$ est simple, donc, en prenant $u < v$ dans $B_\emptyset$, nous pouvons supposer que $B_\emptyset = \{u, v\}$.Par le Lemme 4.3.9, quitte à remplacer $B_{\{x\}}$ par un sous-treillis, nous pouvons supposer que $B_{\{x\}}$ est une chaîne de longueur deux, pour tout $x \in \underline{n}$. Il découle alors du Lemme 4.3.6 que M_n est un sous-treillis de $B_{\underline{n}}$, et donc que $M_n \in \mathcal{V}$, une contradiction. $\square$

THÉORÈME 4.3.11. *Soit* $\mathcal{V}_1$ *une variété finiment engendrée de treillis modulaires, soit* $\mathcal{V}_2$ *une variété finiment engendrée de treillis. Soit* $n \geq 3$ *un entier tel que* $M_n \in \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$. *Si* $\mathrm{lh}(K) \leq 3$ *pour tout treillis simple* $K \in \mathcal{V}_1$, *alors* $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) \leq \aleph_2$. *Si de plus l'une des deux conditions suivante est réalisée*

(1) $\mathrm{lh}(K) \leq 2$ *pour tout treillis simple* $K \in \mathcal{V}_1$ *et* $M_3 \in \mathcal{V}_2$.

(2) $\mathrm{lh}(K) \leq 3$ *pour tout treillis simple* $K \in \mathcal{V}_1$ *et* $\mathrm{Sub}\, F^3 \in \mathcal{V}_2$ *pour un corps* F.

Alors $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) = \aleph_2$.

DÉMONSTRATION. Par le Lemme 4.3.10, $\mathrm{crit}(\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) \leq \aleph_2$.

Supposons que $\operatorname{lh}(K) \leq 2$ pour tout treillis simple $K \in \mathcal{V}_1$ et $M_3 \in \mathcal{V}_2$. Comme $\operatorname{Sub}\mathbb{F}_2^2 \cong M_3 \in \mathcal{V}_2$, d'après le Théorème 4.2.5, $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) \geq \aleph_2$.

Supposons que $\operatorname{lh}(K) \leq 3$ pour tout treillis simple $K \in \mathcal{V}_1$ et $\operatorname{Sub} F^3 \in \mathcal{V}_2$ pour un corps F, d'après le Théorème 4.2.5, $\operatorname{crit}(\mathcal{V}_1;\mathcal{V}_2) \geq \aleph_2$. □

De manière analogue nous obtenons les points critiques suivants.

Corollaire 4.3.12. *Les égalités suivantes sont satisfaites*

$$\begin{aligned}
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n;\mathcal{M}_{m,m}) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1};\mathcal{M}_{m,m}) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1};\mathcal{M}_{m,m}^{0,1}) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n;\mathcal{M}_{m,m}^{0}) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n;\mathcal{M}_{m}^{0}) &= \aleph_2, \qquad \textit{pour tous } n,m \textit{ avec } 3 \leq m < n \leq \omega.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $n' \leq n$ un entier tel que $m < n' < \omega$. Comme $M_{n'} \notin \mathcal{M}_{m,m}$, le Lemme 4.3.10 montre que $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_{n'}^{0,1};\mathcal{M}_{m,m}) \leq \aleph_2$, donc :

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1};\mathcal{M}_{m,m}) \leq \aleph_2. \tag{4.3.1}$$

Le treillis $\operatorname{Sub}\mathbb{F}_2^3 \cong M_3$ est dans $\mathcal{M}_{m,m}$, les treillis simples de $\mathcal{M}_{m,m}$ sont de longueur au plus trois et les treillis finiment engendrés de $\mathcal{M}_n$ sont de longueur finie (il sont même finis). Donc, par le Théorème 4.2.5

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n;\mathcal{M}_{m,m}^{0}) \geq \aleph_2. \tag{4.3.2}$$

Nous obtenons de la manière analogue l'inégalité suivante :

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1};\mathcal{M}_{m,m}^{0,1}) \geq \aleph_2. \tag{4.3.3}$$

Toute les égalités du corollaire sont des conséquences immédiates de (4.3.1), (4.3.2) et (4.3.3). □

Cela nous permet de prouver le corollaire suivant :

Corollaire 4.3.13. $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_{4,3};\mathcal{M}_{3,3}) \leq \aleph_2$.

Cette question a été posée par Ploščica.

Lemme 4.3.14. *Soit F un corps, soit $n \in \omega$. Alors $M_n \in \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)$ si et seulement si $n \leq 1 + \operatorname{card} F$.*

Démonstration. Si F est infini alors le résultat est évident. Nous pouvons donc supposer que F est fini.

Si $n \leq 1 + \operatorname{card} F$, alors M_n est un sous-treillis de $M_{1+\operatorname{card} F} \cong \operatorname{Sub} F^2 \in \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)$, donc $M_n \in \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)$.

Supposons maintenant que $M_n \in \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)$. Par le Lemme 2.5.10, M_n est un quotient d'un sous-treillis de $\operatorname{Sub} F^3$. Comme M_n satisfait la condition de Whitman, le théorème de Davey-Sands (Théorème 2.3.30) prouve que M_n est projectif dans la classe de tous les treillis finis. En conséquence, comme $\operatorname{Sub} F^3$ est fini, M_n est un sous-treillis de

$\operatorname{Sub} F^3$. Donc il existe des sous-espaces vectoriels distincts $A, B, V_1, V_2, \ldots, V_n$ de F^3 tels que $V_i \cap V_j = A$ et $V_i + V_j = B$, pour tous $1 \leq i < j \leq n$. Soient i, j, k distincts, alors :

$$\dim V_i + \dim V_j = \dim B + \dim A = \dim V_i + \dim V_k.$$

Donc $\dim V_j = \dim V_k$. Mais $\dim A < \dim V_1 < \dim B \leq \dim F^3 = 3$. Si $\dim A = 1$, alors M_n est isomorphe à $\{A/A, V_1/A, \ldots, V_n/A, B/A\}$ qui est un sous-treillis de $\operatorname{Sub}(B/A)$, avec $\dim B/A = 2$.Si $\dim A = 0$, alors :

$$\dim B = \dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = 2 \cdot \dim V_1.$$

Donc $\dim B$ est pair, de plus $\dim B \leq 3$, en conséquence $\dim B = 2$.

Dans les deux cas M_n est un sous-treillis de $\operatorname{Sub} E$ pour un F-espace-vectoriel E de dimension deux. Mais $\operatorname{Sub} E \cong M_{1+\operatorname{card} F}$, donc $n \leq 1 + \operatorname{card} F$. $\square$

Corollaire 4.3.15. *Soit F un corps fini et soit $n > 1 + \operatorname{card} F$. Alors :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n; \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n; \mathbf{Var}_0(\operatorname{Sub} F^3)) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^3)) &= \aleph_2.
\end{aligned}$$

Démonstration. Par le Lemme 4.3.14, $M_n \notin \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)$. De plus, tous les treillis simples de $\mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)$ sont de longueur au plus trois. Donc le Lemme 4.3.10 implique l'inégalité suivante :

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3)) \leq \aleph_2. \tag{4.3.4}$$

Comme tous les treillis simples de $\mathcal{M}_n$ sont de longueur au plus deux, il découle du Théorème 4.2.5 que

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_n; \mathbf{Var}_0(\operatorname{Sub} F^n)) \geq \aleph_2, \quad \text{et} \operatorname{crit}(\mathcal{M}_n^{0,1}; \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^n)) \geq \aleph_2. \tag{4.3.5}$$

Toute les égalités désirées sont conséquences des inégalités (4.3.4) et (4.3.5). $\square$

Corollaire 4.3.16. *Soient F et K des corps finis. Si* $\operatorname{card} F > \operatorname{card} K$ *alors les égalités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{crit}(\mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3); \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} K^3)) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathbf{Var}(\operatorname{Sub} F^3); \mathbf{Var}_0(\operatorname{Sub} K^3)) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^3); \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} K^3)) &= \aleph_2;\\
\operatorname{crit}(\mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^3); \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} K^3)) &= \aleph_2.
\end{aligned}$$

Démonstration. Par le Lemme 4.3.14, $M_{1+\operatorname{card} F} \notin \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} K^3)$, de plus les treillis simples de $\mathbf{Var}(\operatorname{Sub} K^3)$ sont de longueur au plus trois. Donc, par le Lemme 4.3.10 :

$$\operatorname{crit}(\mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} F^3); \mathbf{Var}(\operatorname{Sub} K^3)) \leq \aleph_2. \tag{4.3.6}$$

Comme tous les treillis simples de $\mathbf{Var}(\mathrm{Sub}\,F^3)$ sont de longueur au plus trois, le Théorème 4.2.5 implique les inégalités suivantes :

$$\mathrm{crit}(\mathbf{Var}(\mathrm{Sub}\,F^3); \mathbf{Var}_0(\mathrm{Sub}\,K^n)) \geq \aleph_2, \tag{4.3.7}$$

$$\mathrm{crit}(\mathbf{Var}_{0,1}(\mathrm{Sub}\,F^3); \mathbf{Var}_{0,1}(\mathrm{Sub}\,K^n)) \geq \aleph_2. \tag{4.3.8}$$

Toutes les autres égalités du corollaire sont conséquences de (4.3.6), (4.3.7) et (4.3.8). $\square$

Lemme 4.3.17. *Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée de treillis (resp., une variété finiment engendrée de treillis avec 0), soit $m \geq 2$ un entier. Supposons que pour tous treillis simples K de $\mathcal{V}$, il n'existe pas $b_0, b_1, \dots, b_{m-1} > u$ dans K tel que $b_i \wedge b_j = u$ (resp., $b_i \wedge b_j = 0$), pour tous $0 \leq i < j \leq m-1$. Alors* $\mathrm{crit}(\mathcal{M}^{0,1}_{2m-1}; \mathcal{V}) \leq \aleph_2$.

Démonstration. Posons $n = 2m-1 \geq 3$. Soit $\vec{A} = (A_P, f_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ le système direct de $\mathcal{M}^{0,1}_n$ défini plus haut. Supposons que $\mathrm{crit}(\mathcal{M}^{0,1}_n; \mathcal{V}) > \aleph_2$. Par le Lemme 4.3.7, il existe un relèvement $\vec{B} = (B_P, g_{P,Q})_{P \leq Q \text{ dans } I_n}$ de $\mathrm{Con_c} \circ \vec{A}$ dans $\mathcal{V}$. Soit $\vec{\xi} = (\xi_P)_{P \in I_n} \colon \mathrm{Con_c} \circ \vec{A} \to \mathrm{Con_c} \circ \vec{B}$ un isomorphisme naturel. Quitte à prendre un sous-treillis de $B_\emptyset$, nous pouvons supposer que $B_\emptyset = \{u, v\}$ avec $u < v$. Comme l'application $f_{P,Q}$ est une inclusion, nous pouvons supposer que $g_{P,Q}$ est une inclusion, pour tous $P \leq Q$ dans I_n.

Soit $x \in \underline{n}$. Le Lemme 4.3.5 implique que $\Theta_{B_{\{x\}}}(u, v)$ est la plus grande congruence de $B_{\{x\}}$. Donc :

$$\Theta_{B_{\{x\}}}(u, v) = \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x)) \vee \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(a_x, 1))$$

En conséquence il existe $t^x_0 = u < t^x_1 < \cdots < t^x_{r+1} = v$ dans $B_{\{x\}}$ tels que, pour tout $0 \leq i \leq r$:

$$\text{soit } (t^x_i, t^x_{i+1}) \in \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x)) \text{ soit } (t^x_i, t^x_{i+1}) \in \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(a_x, 1))$$

Posons $b_x = t^x_1$. Posons :

$$X' = \{x \in \underline{n} \mid \Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x) = \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(0, a_x))\}$$

$$X'' = \{x \in \underline{n} \mid \Theta_{B_{\{x\}}}(u, b_x) = \xi_{\{x\}}(\Theta_{A_{\{x\}}}(a_x, 1))\}.$$

Par symétrie nous pouvons supposer que $\mathrm{card}\, X' \geq \mathrm{card}\, X''$ (nous pouvons remplacer le diagramme $\vec{A}$ par son dual si nécessaire). Comme $\underline{n} = X' \cup X''$ et $\mathrm{card}\, \underline{n} = n = 2m-1$, $\mathrm{card}\, X' \geq m$. Soient $x, y \in X'$ distincts, il découle du Lemme 4.3.5(2) que $b_x \wedge b_y = u$. Nous obtenons ainsi une famille d'éléments $(b_x)_{x \in X'}$ plus grands que u telle que $b_x \wedge b_y = u$ (resp., $b_x \wedge b_y = u = 0$) pour tous $x \neq y$ dans X', une contradiction. $\square$

Avec une preuve similaire, en utilisant le Lemme 4.3.8 au lieu du Lemme 4.3.7 nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 4.3.18. *Soit $\mathcal{V}$ une variété de treillis (resp., une variété de treillis avec 0), soit $m \geq 2$ un entier. Supposons que pour tous treillis simples K de $\mathcal{V}$, il n'existe pas $b_0, b_1, \dots, b_{m-1} > u$ dans K tel que $b_i \wedge b_j = u$ (resp., $b_i \wedge b_j = 0$), pour tous $0 \leq i < j \leq m-1$. Alors* $\mathrm{crit}(\mathcal{M}^{0,1}_{2m-1}; \mathcal{V}) \leq \aleph_2$.

THÉORÈME 4.3.19. *Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée de treillis ou une variété finiment engendrée de treillis avec* 0*. Si $M_3 \in \mathcal{V}$ alors :*

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega; \mathcal{V}) = \aleph_2;$$
$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega^0; \mathcal{V}) = \aleph_2.$$

Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée de treillis bornés. Si $M_3 \in \mathcal{V}$ alors :

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega^{0,1}; \mathcal{V}) = \aleph_2.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{V}$ une variété finiment engendrée de treillis, soit m le plus grand cardinal d'un treillis simple de $\mathcal{V}$. Les hypothèses du Lemme 4.3.17 sont satisfaites, donc $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_{2m-1}^{0,1}; \mathcal{V}) \leq \aleph_2$, en conséquence $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega^{0,1}; \mathcal{V}) \leq \aleph_2$.

Notons par $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments. Soit $\mathcal{V}$ une variété de treillis avec 0 (resp., avec 0 et 1), tel que $M_3 \in \mathcal{V}$. La variété $\mathcal{M}_\omega$ est localement finie, donc tous les treillis finiment engendrés de $\mathcal{M}_\omega$ sont de longueur finie, de plus tous les treillis simples de $\mathcal{M}_\omega$ sont de longueur au plus deux. Le Théorème 4.2.5 implique donc que

$$\operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega; \mathbf{Var}_0(\operatorname{Sub} \mathbb{F}_2^2)) \geq \aleph_2 \text{ (resp., } \operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega^{0,1}; \mathbf{Var}_{0,1}(\operatorname{Sub} \mathbb{F}_2^2)) \geq \aleph_2).$$

Enfin $\operatorname{Sub} \mathbb{F}_2^2 \cong M_3$, donc $\operatorname{crit}(\mathcal{M}_\omega; \mathcal{V}) \geq \aleph_2$. □

Bibliographie

[1] G. Birkhoff, “Lattice Theory”. Revised ed. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV American Mathematical Society, Providence, R.I. 1961 xiii+283 p.

[2] S. Bulman-Fleming et K. McDowell, *Flat semilattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **72**, no. 2 (1978), 228–232.

[3] S. Z. Ditor, *Cardinality questions concerning semilattices of finite breadth*, Discrete Math. **48**, no. 1 (1984), 47–59.

[4] B. A. Davey et B. Sands, *An application of Whitman's condition to lattices with no infinite chains*, Algebra Universalis **7**, no. 2 (1977), 171–178.

[5] P. Erdös, A. Hajnal, A. Máté et R. Rado, “Combinatorial Set Theory : Partition Relations for Cardinals”. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 106. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984. 347 p.

[6] C. Faith et Y. Utumi, *On a new proof of Litoff's theorem*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **14** (1963) 369–371.

[7] R. Freese, W. A. Lampe et W. Taylor, *Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. I*, Pacific J. Math. **82** (1979), no. 1, 59–68.

[8] K. D. Fryer et I. Halperin, *Coordinates in geometry*, Trans. Roy. Soc. Canada. Sect. III. (3) **48** (1954), 11–26.

[9] N. Funayama et T. Nakayama, *On the distributivity of a lattice of lattice congruences*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **18** (1942), 553–554.

[10] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. W. Mislove, D. S. Scott “A Compendium of Continuous Lattices”. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. xx+371 p. ISBN : 3-540-10111-X

[11] P. Gillibert, *Critical points of pairs of varieties of algebras*, préprint, 2007, disponible en ligne à `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00194536/en/`, Internat. J. Algebra Comput., à paraître.

[12] P. Gillibert, *Critical points between varieties generated by subspace lattices of vector spaces*, préprint, 2008, disponible en ligne à `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00324397/fr/`

[13] G. Grätzer, “General Lattice Theory. Second edition”, new appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung, and R. Wille. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998. xx+663 p.

[14] C. Herrmann, *Generators for Complemented Modular Lattices and the von-Neumann-Jónsson Coordinatization Theorems*, préprint 2008.

[15] G. Grätzer, “Universal Algebra”. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1968. xvi+368 p.

[16] G. Grätzer et E. T. Schmidt, *On congruence lattices of lattices.* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **13** (1962), 179–185.

[17] G. Grätzer et E. T. Schmidt, *Characterizations of congruence lattices of abstract algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 34–59.

[18] G. Grätzer, H. Lakser et F. Wehrung, *Congruence amalgamation of lattices.* Acta Sci. Math. (Szeged) **66** (2000), no. 1-2, 3–22.

[19] K. R. Goodearl, "Von Neumann Regular Rings. Second edition". Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, FL, 1991. xviii+412 pp.

[20] A. Hajnal et A. Máté, *Set mappings, partitions, and chromatic numbers*, Logic Colloquium '73 (Bristol, 1973), pp. 347–379. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. **80**, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[21] A. P. Huhn, *On the representation of distributive algebraic lattices. III.* Acta Sci. Math. (Szeged) **53** (1989), no. 1-2, 11–18.

[22] P. Jipsen, H. Rose, "Varieties of lattices". Lecture Notes in Mathematics, 1533. Springer-Verlag, Berlin, 1992. x+162 pp.

[23] B. Jónsson, *Representations of relatively complemented modular lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 272–302.

[24] B. Jónsson, *Algebras whose congruence lattices are distributive*, Math. Scand. **21** (1967), 110–121.

[25] C. Kuratowski, *Sur une caractérisation des alephs*, Fund. Math. **38** (1951), 14–17.

[26] W. A. Lampe, *Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. II*, Pacific J. Math. **103** (1982), 475–508.

[27] W. A. Lampe, *Simultaneous congruence representations : a special case*, Algebra Universalis **54** (2005), 249–255

[28] M. Ploščica, *Separation properties in congruence lattices of lattices*, Colloq. Math., **83** (2000), 71–84.

[29] M. Ploščica, *Dual spaces of some congruence lattices*, Topology and its Applications, **131** (2003), 1–14.

[30] M. Ploščica, *Nonrepresentable distributive semilattices*, J. Pure Appl. Algebra, à paraître.

[31] M. Ploščica, J. Tůma et F. Wehrung, *Congruence lattices of free lattices in nondistributive varieties*, Colloq. Math. **76**, no. 2 (1998), 269–278.

[32] P. Pudlák, *On congruence lattices of lattices*, Algebra Universalis **20** (1985), 96–114.

[33] P. Růžička, *Free trees and the optimal bound in Wehrung's theorem.* Fund. Math. **198** (2008), 217–228.

[34] P. Růžička, J. Tůma et F. Wehrung, *Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras.* J. Algebra **311**, no. 1 (2007), 96–116.

[35] E. T. Schmidt, *Every finite distributive lattice is the congruence lattice of some modular lattice.* Algebra Universalis **4** (1974), 49–57.

[36] E. T. Schmidt, *The ideal lattice of a distributive lattice with* 0 *is the congruence lattice of a lattice.* Acta Sci. Math. (Szeged) **43** (1981), no. 1-2, 153–168.

[37] J. Tůma et F. Wehrung, *A survey of recent results on congruence lattices of lattices*, Algebra Universalis **48**, no. 4 (2002), 439–471.

[38] F. Wehrung, *The dimension monoid of a lattice*, Algebra Universalis **40**, no. 3 (1998), 247–411.

[39] F. Wehrung, *A uniform refinement property for congruence lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **127**, no. 2 (1999), 363–370.

[40] F. Wehrung, *A solution to Dilworth's congruence lattice problem*, Adv. Math. **216**, no. 2 (2007), 610–625.

Points critiques de couples de variétés d'algèbres

L'ensemble de toutes les congruences d'une algèbre, ordonné par inclusion, est un treillis algébrique (Birkhoff), ses éléments compacts sont les congruences finiment engendrées ; elles forment un demi-treillis. Un demi-treillis est *relevable* dans une variété V s'il est isomorphe au demi-treillis des congruences compactes d'une algèbre de V. Les travaux de Wehrung sur CLP, ainsi que ceux de Ploščica, illustrent que même pour une variété d'algèbres facile à décrire, comme la variété de tous les treillis, ou une variété finiment engendrée, la caractérisation des demi-treillis relevables est difficile. Le *point critique* entre deux variétés V et W est le plus petit cardinal d'un demi-treillis relevable dans V mais pas dans W.

Nous introduisons un outil, de nature catégorique, donnant des liens entre les relèvements de diagrammes de demi-treillis et les relèvements de demi-treillis dans une variété donnée. Nous montrons que si V et W sont des variétés finiment engendrées de treillis telles que W ne relève pas tous les demi-treillis relevés par V, alors le point critique entre V et W est soit fini, soit un aleph d'indice fini. Nous trouvons deux variétés finiment engendrées de treillis modulaires dont le point critique est $\aleph_1$, ce qui infirme une conjecture posée par Tůma et Wehrung.

Nous prouvons, en utilisant la théorie des anneaux réguliers de von Neumann et la théorie du monoïde de dimension d'un treillis, que le point critique entre des variétés engendrées par des treillis de sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de même dimension finie sur des corps finis est au moins $\aleph_2$. Nous prouvons l'égalité pour les dimensions 2 et 3.

Critical points of pairs of varieties of algebras

The set of all congruences of a given algebra, ordered by inclusion, is an algebraic lattice (Birkhoff), its compact elements are the finitely generated congruences ; they form a semilattice. A semilattice is *liftable* in a variety V if it is isomorphic to the semilattice of all compact congruences of an algebra in V. The works of Wehrung on CLP, and of Ploščica, illustrate that even for an easy to describe variety of algebras, like the variety of all lattices, or the finitely generated varieties, characterizing the liftable semilattices is hard. The *critical point* of two varieties V and W is the smallest cardinal of a semilattice liftable in V but not in W.

We introduce a tool, with categorical flavor, that gives a link between lifting diagrams of semilattices and lifting semilattices in a given variety. Given finitely generated varieties of lattices V and W such that W does not lift all semilattices liftable in V, we prove that the critical point of V and W is either finite or some aleph of finite index. We give two finitely generated varieties of modular lattices with critical point $\aleph_1$, which disproves a conjecture of Tůma and Wehrung.

Using the theory of Von Neumann regular rings together with the dimension monoid of a lattice, we prove that the critical point of varieties of lattices generated by subspace lattice of vector spaces of the same finite dimension on finite fields is at least $\aleph_2$. We prove the equality for dimensions 2 and 3.

Discipline : Mathématiques et leurs interactions

Mots clés :

indexation Rameau : Treillis de congruences ; représentation de treillis de congruences ; variétés (algèbre universelle) ; algèbre universelle ; catégories (mathématiques) ; foncteurs, théorie des ; Von Neumann, anneaux réguliers de ; nombres cardinaux

indexation libre : treillis, congruence, catégorie, foncteur, point critique, condensat, recouvrement normé.

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139, Département de Mathématiques

Université de Caen/Basse-Normandie, Campus 2, BP 5186 ; 14032 Caen Cedex, France

adresse mail : `pierre.gillibert@math.unicaen.fr` ou `pgillibert@yahoo.fr`

site web : `http ://www.math.unicaen.fr/~giliberp/`